

Aufgaben zum Mathevorkurs

Technische Fakultät

William Glover Martin Goth Thomas Liebetraut
Patricia Quellmalz Fabian Wenzelmann Jan Ole von Hartz



Autor*innen:

William Glover, Martin Goth, Thomas Liebetraut, Patricia Quellmalz, Fabian Wenzelmann, Jan Ole von Hartz

Lektor*innen:

Malte Ahl, Christian Schilling, Andreas Steffen, Leonie Feldbusch, Ann-Catherine Nölken, Hans Albert

Version:

2.4.1, September 2025

Kontakt:

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fachschaft TF
Georges-Köhler-Allee 51
79110 Freiburg
`erstiorga@fachschaft.tf.uni-freiburg.de`

Lizenz:

Copyright © 2012 - 2020 William Glover, Martin Goth, Thomas Liebetraut, Patricia Quellmalz, Fabian Wenzelmann, Jan Ole von Hartz.

Dieses Skript ist veröffentlicht unter den Bedingungen der Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0) Lizenz.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0) License.

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Vorwort

Natürlich gehören zu einem echten Vorkurs auch Aufgaben, bei denen man das Gelernte selbst anwenden muss. Deswegen legen wir allen Teilnehmer*innen nahe, zu versuchen, die Aufgaben selbstständig zu lösen und sich die entsprechenden Stellen im Skript bei Bedarf noch einmal anzuschauen.

Die Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass sie sich in der Regel ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner, Laptop etc. lösen lassen. Bei einigen Aufgaben werdet ihr dennoch ein Taschenrechner-Symbol  finden. Der Taschenrechner soll dabei nicht benutzt werden um die Lösung direkt zu berechnen und den eigentlichen Lösungsweg zu umgehen. Er soll nur ein Hilfsmittel sein um Rechnungen durchzuführen, die man nicht einfach so selbst machen kann. Z. B. sollte er nie benutzt werden um ein Integral automatisch zu bestimmen - er kann aber dann eingesetzt werden, wenn explizite Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Allgemein werdet ihr in den Vorlesungen und Übungen keine Taschenrechner verwenden. Auch in den Klausuren ist meist nur ein Stift als Hilfsmittel erlaubt.

Ihr werdet sicherlich auch feststellen, dass einige Aufgaben sehr einfach zu lösen sind während andere sehr viel schwerer sind - dies haben wir absichtlich so gemacht, damit ihr etwas kompliziertere Aufgabentypen zum „Knobeln“ habt. Besonders schwere Aufgaben sind mit einem ★ gekennzeichnet.

Inhaltsverzeichnis

1	Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre	5
2	Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen	9
3	Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis	11
4	Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra	19
5	Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise	23

1 Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$C = \{X, Y\}$$

$$D = \{\text{foo}, \text{bar}\}$$

$$E = \{\text{fo}\}$$

Bilde daraus die folgenden Mengen:

(a) $A \cap B$

(b) $B \cup A$

(c) $A \setminus C$

(d) $C \times A$

(e) $((A \cup B) \setminus (B \cap A)) \cup C$

(f) $\mathcal{P}(A)$

(g) $D \cup E$

(h) $D \setminus E$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind (echte) Teilmengen, (echte) Obermengen, gleiche Mengen, bzw. Potenzmengen voneinander?

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{9, 7, 5\}$$

$$C = \{7, 9, 5\}$$

$$D = \{\emptyset, \{7\}, \{9, 5\}, \{9, 7, 5\}, \{9\}, \{9, 7\}, \{7, 5\}, \{5\}\}$$

$$E = \{\emptyset, \{9, 7, 5\}, \{7\}, \{5\}, \{9, 1\}, \{9\}, \{7, 5\}\}$$

Aufgabe 3

★ Auf der Ersti-Hütte¹ sollen Übungsblätter gelöst werden. Insgesamt nehmen 42 Studierende an der Ersti-Hütte teil (von denen jede*r mindestens ein Übungsblatt bearbeiten muss).

Davon müssen 30 Studierende ein Übungsblatt für Mathe I, 25 ein Übungsblatt für Informatik I und 20 ein Übungsblatt für Mechanik bearbeiten. 15 müssen sowohl Mathe I als auch Informatik I bearbeiten, 18 sowohl Mathe I als auch Mechanik und 5 sowohl Informatik I als auch Mechanik².

Wie viele Studierende müssen alle drei Übungsblätter bearbeiten? Wie viele müssen *mindestens* zwei Übungsblätter bearbeiten?

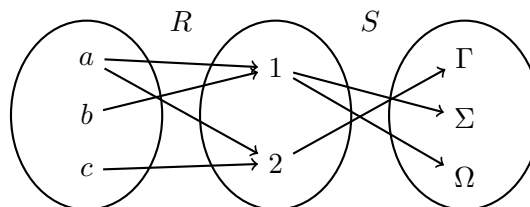
Tipp: Formuliere das Problem als ein mengentheoretisches Problem. Verwende dabei, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ bzw. umgeformt $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$ für endliche Mengen A, B .

Aufgabe 4

Gegeben seien die beiden Relationen R, S , wobei

$$\begin{aligned} R &\subseteq \{a, b, c\} \times \{1, 2\} \\ S &\subseteq \{1, 2\} \times \{\Gamma, \Sigma, \Omega\} \end{aligned}$$

in graphischer Notation:



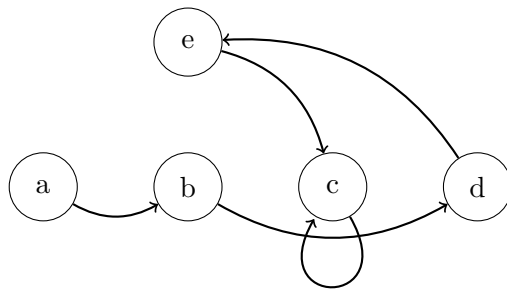
Bestimme $R \circ S$.

Aufgabe 5

Gegeben sei folgende Relation:

¹Informationen dazu auf der Fachschaftshomepage <http://fachschaft.tf/erstsemester/erstihuette>.

²Man frage nicht, wie es zu solch komischen Stundenplänen kommen konnte.



Vervollständige die Relation so, dass sie reflexiv und transitiv ist. Füge so wenige Pfeile wie möglich hinzu.

Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden Relationen in graphischer Notation:

R_1 :



R_2 :



Überprüfe diese Relationen, die Relation = auf den natürlichen Zahlen sowie die Relation $\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$ bezüglich aller Eigenschaften aus Definition 2.22 (Seite 16), wobei $R_1 \subseteq \{a, b\} \times \{a, b\}$ und $R_2 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$.

	reflexiv	irreflexiv	symm.	antisymm.	transitiv
R_1					
R_2					
$= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$					
$\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$					

Aufgabe 7

Beweise, dass die Kleinerrelation transitiv ist. Verwende dabei die formale Definition der Kleinerrelation (Def. 2.16 auf Seite 14).

2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

Aufgabe 1

Wir haben bereits gesehen, wie sich die *Addition* auf den natürlichen Zahlen formal definieren lässt (Definition 3.3 auf Seite 20). Gib ebenfalls eine formale Definition für die *Multiplikation* und *Potenzierung* an.

Aufgabe 2

Bringe auf Dezimalform:

(a) $\frac{2^{80} \cdot 8^6}{16^{25}}$

(b) $\frac{1}{2400} + \frac{1}{1500} + \frac{1}{4000}$

Aufgabe 3

Bringe die folgenden komplexen Zahlen in die Form $a + ib$:

(a) $(5 + 3i) + (2 - 4i)$

(b) $6 \cdot (-2 + 5i)$

(c) $3i \cdot (1 + 5i)$

(d) $(3 + 6i) + 2 \cdot (4 - 3i)$

(e) $\frac{5+i}{2+3i}$

Bringe in Polarform

(A) $\sqrt{3} + 3i$

Aufgabe 4

Es sei $\ln(a) = 2$ und $\ln(b) = 3$. Berechne x .

(a) $x = \ln(ab) + \ln(a^3)$

(b) $x = \ln\left(\frac{1}{a^2}\right)$



2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

(c) $ab^2 = e^{x^3}$

(d) $a^x = e^{84}$

(e) $\boxplus x = a + b$

Aufgabe 5

Vereinfache und berechne soweit möglich:

(a) $x^{2k-1} \cdot y^{k+1}(-x)^5 \cdot y$

(b) $3\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} - \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b^3}}{0.5}$

(c) $\sqrt{27x^2 - 9y} + \sqrt{3x^2 - y} + \sqrt{c^2 \cdot d^2} - c\sqrt{d^3} + \frac{cd^2}{\sqrt{d}}$

(d) $(2\sqrt{3} - 5\sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 3\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

(e) $\ln(x^5) - 4\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(f) $\ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{(ab)^{-1}} + \frac{1}{2}\ln b$

(g) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

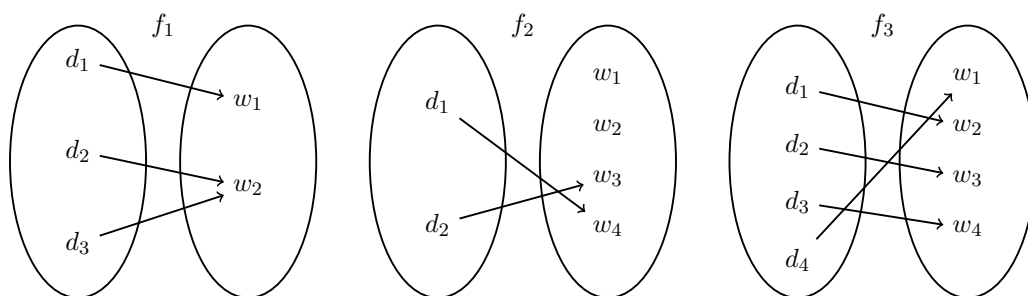
(h) $\frac{a^2 - ab}{a - b} - \frac{b}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{b}$

(i) $7.3 \cdot 10^{17} + \frac{5 \cdot 10^{21} + 4 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^4}$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Aufgabe 1

(a) Entscheide für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv und bijektiv sind:



(b) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv / surjektiv? Wenn eine der Funktionen eine der Eigenschaften nicht erfüllt, so schränke Definitions- und / oder Wertebereich so ein, dass die Eigenschaft gilt.

- i) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^4$
- ii) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 5 \cdot \sin x$
- iii) $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(x) = 2 \cdot x$
- iv) $f_4 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f_4(x) = x$

Aufgabe 2

Was ist der Grenzwert der Folge $a_n := \frac{\sin n}{n}$? Beweise deine Behauptung mit der Definition des Grenzwertes.

Aufgabe 3

Berechne die Grenzwerte der folgenden Folgen:

- (a) $a_n = \frac{n+1}{n}$
- (b) $b_n = \frac{6n^3+2n^2+5n}{5n^3+n^2+100n}$
- (c) $c_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n+5}$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(d) ★ $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

Tipp: „Geschickt“ erweitern und die 3. binomische Formeln verwenden:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Folgen

$$a_n = 2n$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{n!}$$

Zeige, dass

(a) a_n streng monoton steigend ist.

(b) b_n streng monoton fallend ist (für $n \geq 1$).

Hinweis. Bei Folgen bedeutet streng monoton steigend (fallend), dass $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

Aufgabe 5

Gib eine *rekursive* Berechnungsvorschrift für folgende Folgen an:

(a) 1, 4, 16, 64, 256, ...

(b) 1, 2, 1, 2, 1, ...

(c) 3, 5, 7, 9, 11, ...

Aufgabe 6

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_0 := 1$$

$$a_n := 2 \cdot a_{n-1} + 1$$

Gib eine *explizite* Darstellung der Folge an, d. h. ohne Rekursion.

Aufgabe 7

Der *Binomialkoeffizient*, geschrieben $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, ist definiert als die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Beispiel: Gegeben sei die vier elementige Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Dann sind alle *dreielementigen* Teilmengen: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ und folglich ist $\binom{4}{3} = 4$.

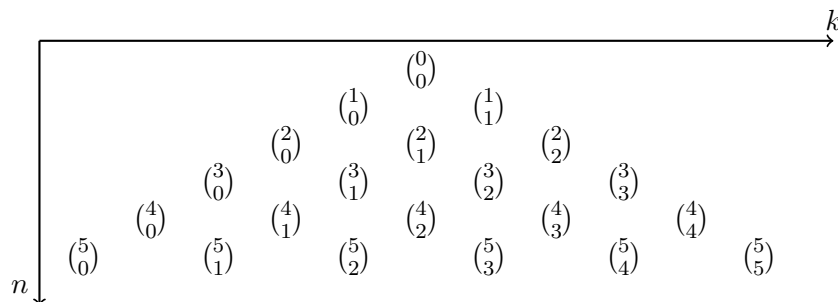
Für den Binomialkoeffizient gilt folgende Rekursionsgleichung:

$$\binom{n}{0} = 1$$

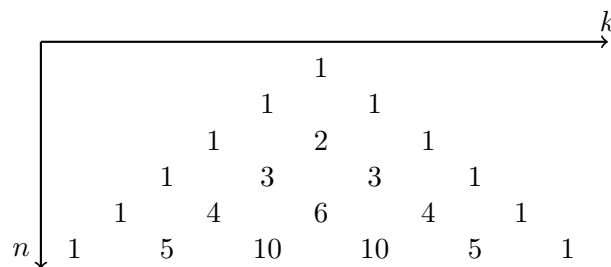
$$\binom{0}{k} = 0 \text{ für } k \neq 0$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich im sogenannten *Pascalschen Dreieck*¹ anordnen und berechnen:



die entsprechenden Werte sind:



Füge zwei weitere Zeilen in das Dreieck ein. Gib an, wie mit Hilfe der Rekursionsgleichung ein Eintrag im Dreieck bestimmt wird.

Aufgabe 8

Die m -te *Bell-Zahl*², geschrieben B_m , lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$B_0 = 1$$

$$B_{m+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k$$

Berechne B_5 .

¹benannt nach Blaise Pascal, französischer Mathematiker, 1623 - 1662

²benannt nach Eric Temple Bell, schottischer Mathematiker, 1883 - 1960

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Aufgabe 9

Ein Tennisball fällt aus einer Höhe von 5m zu Boden und springt danach auf eine Höhe von 4.2m zurück. Die wieder erreichte Höhe des Tennisballs verringert sich bei jedem weiteren Aufprall um den gleichen Prozentsatz. Berechne einerseits welche Höhe der Ball nach dem 12. Aufprall erreicht und andererseits ab dem wievielten Aufprall erstmals eine Höhe von 42cm nicht mehr überschritten wird.

Aufgabe 10

Berechne die folgenden Werte:

$$(a) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} ij$$

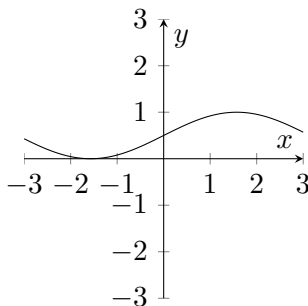
$$(b) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=2}^8 (2i + j)$$

Aufgabe 11

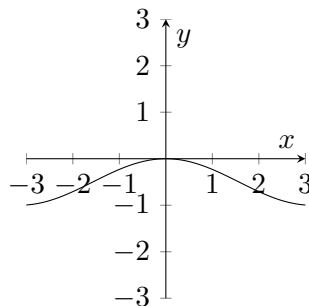
Ordne jedem Graphen die korrekte Funktion zu

$$\begin{array}{lll} a(x) = \frac{(x-1)^2}{-5} + 1 & b(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x-2) & c(x) = \frac{1}{-2} + \cos(x) \frac{1}{2} \\ d(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) & e(x) = \frac{\sin(x)}{2} + 0.5 & f(x) = 2(x+1)^2 \\ g(x) = -x^2 + 2 & h(x) = -x + 1 & i(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ j(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) & k(x) = \frac{7x}{2} - 1 & l(x) = -x - 1 \end{array}$$

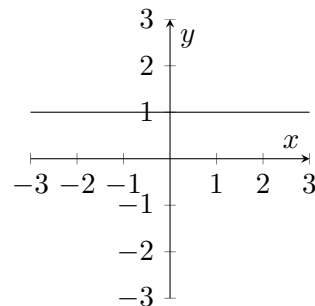
1.



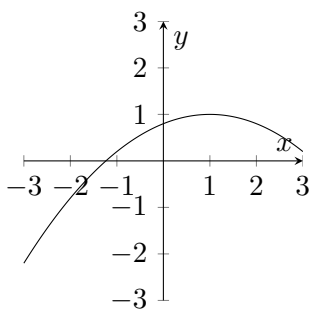
2.



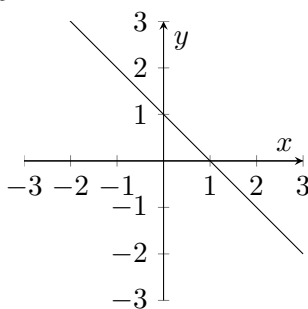
3.



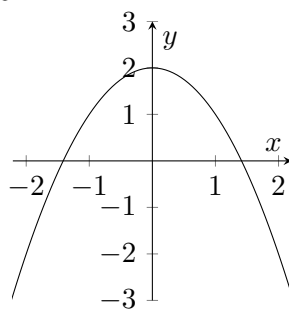
4.



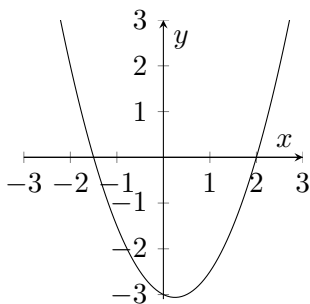
5.



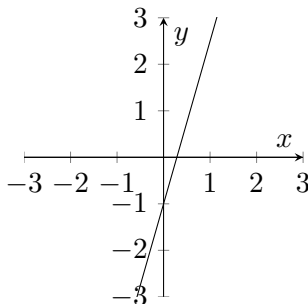
6.



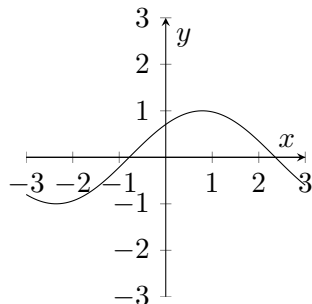
7.



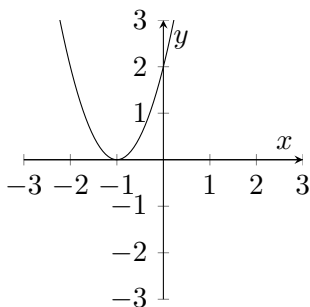
8.



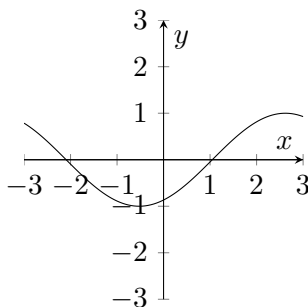
9.



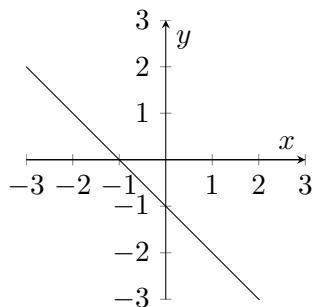
10.



11.



12.



Aufgabe 12

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 + 4x^2 - 19x + 14$.

(a) Gib die Horner-Darstellung des Polynoms an.

(b)  Verwende das Horner-Schema, um $p(x)$ in der Form $p(x) = (x-1)\hat{p}(x)$ darzustellen. Bestimme alle weiteren Nullstellen.

Aufgabe 13

Sei $q(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$. Werte $q(4)$ unter Verwendung des Horner-Schemas aus und gib $q(x)$ in der Darstellung $q(x) = (x-4)\hat{q}(x) + q(4)$ an.

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Aufgabe 14

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 5x + 4$

(b) $f(x) = x^2 - 4$

(c) $f(x) = x^2 + 4x - 2.25$

(d) $f(x) = 7x^2 - x + 11$

(e) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x + 4}$

(f) $f(x) = x^3 - 2.5x^2 - 11x - 7.5$

(g) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Aufgabe 15

Gib die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen an:

(a) $2 \ln(x^4)$

(b) $x^x = e^{x \ln x}$ für $x > 0$

(c) $\frac{x+3}{\sqrt{\cos x}}$

(d) $(x\sqrt{2} - x^2)^3$

(e) $\frac{a+1}{(a^2 - x + x^2)^2}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$

(f) $(1-x)^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

(g) $(x - x^2)^3 (1 + 3x)^2$

(h) $\sqrt{x^3 + x + 1}$

(i) $\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{1-x}}$

Aufgabe 16

■ Berechne die Fläche A zwischen der größten und kleinsten Nullstelle von

$$f(x) = \frac{x}{3} \sqrt{16 - x^2}$$

Aufgabe 17

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int x^2 e^x \, dx$

(b) $\int x \cos x \, dx$

(c) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

(d) $\int (2x + 8)^7 \, dx$

(e) $\int e^x \sqrt{e^x + 1} \, dx$

(f) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} \, dx$

(g) $\int \sqrt{e^{-x}} \, dx$

(h) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 4)^2}} \, dx$

(i) $\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx$

(j) $\int x e^{2x} \, dx$

4 Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra

Aufgabe 1

Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechne die folgenden Werte:

(a) $u \cdot v$

(b) uv^T

Aufgabe 2

Beweise, dass das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ weder kommutativ noch assoziativ ist.

Aufgabe 3

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Falls nicht, gib die nicht trivialen Linearfaktoren an, mit denen sich der Nullvektor erzeugen lässt.

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

(a)  Wähle unter den folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus. Wähle also drei Vektoren, welche linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

4 Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra

- (b) Ergänze die folgenden beiden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$, finde also einen weiteren Vektor v_3 , sodass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- (c) Ergänze die folgenden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, finde also zwei weitere Vektoren v_3, v_4 , sodass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

■ Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \\ -2 & -8 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne $(2 \cdot (A + B)) C$.

Aufgabe 6

Berechne die Determinante von A mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{Z}^{7 \times 7}$ eine Matrix die aus drei Matrizen $D_1 \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$, $D_2 \in \mathbb{Z}^{1 \times 1}$, $D_3 \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ besteht und sonst nur aus 0-en:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Berechne die Determinante von A mit $\det(A) = \det(D_1) \cdot \det(D_2) \cdot \det(D_3)$.

Aufgabe 8

Löse die folgenden beiden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a)

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = -1$$

$$6x_1 + 11x_3 = -7$$

$$3x_1 + x_2 + 12x_3 = 0$$

(b) bereits in Matrizenform:

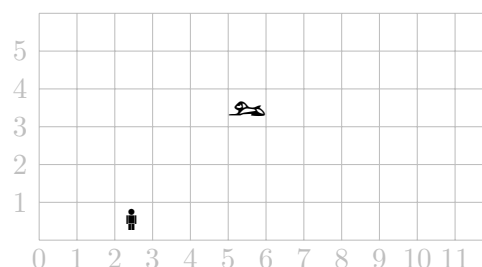
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Wir betrachten ein einfaches 2D Computerspiel. Ein portugiesischer Bäckermeister befindet sich in dem Spielfeld auf der Position $r_0 = (2, 0)^T$. Die Spielfigur hüpfert hoch und bewegt sich dabei mit einer Geschwindigkeit von $v = (1, 2)^T$ vorwärts, d.h. in einem Zeitabschnitt bewegt sich die Figur um ein Feld nach rechts und zwei Felder nach oben. Durch die Gravitation verlangsamt sich jedoch die Geschwindigkeit in jedem Zeitabschnitt nach der Bewegung, die Beschleunigung soll $a = (0, -0.5)^T$ betragen.

- Gib eine Formel für die Position $r_t, t \in \mathbb{N}$ der Spielfigur nach t Zeitschritten an.
- An welcher Position befindet sich die Spielfigur nach $t = 7$ Zeitschritten?
- Nehmen wir an, dass unser Bäckermeister eine Pusteblume verspeist hat und nun Feuerbälle schießen kann. Auf dem Feld $(5, 3)^T$ befindet sich ein Gegner und der Feuerball fliegt in einem Winkel $\alpha = 0.75$ von Punkt $(3, 1)^T$ aus. Wird der Feuerball durch das Feld des Gegners fliegen? Der Feuerball wird nicht von der Gravitation beeinflusst.

Auf einem Feld befinden soll hier immer bedeuten, dass das komplette Feld von der Figur eingenommen wird, unser Held belagert also das Feld welches von $(2, 0)^T$ bis nach $(3, 1)^T$ reicht, siehe auch folgende Abbildung:



5 Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise

Aufgabe 1

Zeige, dass die folgende Formel *nicht erfüllbar* ist:

$$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \wedge \neg (x_1 \vee x_2)$$

Aufgabe 2

Gib alle Belegungen ν der folgenden Formel ϕ an für die gilt $\hat{\nu}(\phi) = 0$:

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \rightarrow x_2)$$

Aufgabe 3

Zeige, dass die folgende Formel eine *Tautologie* ist:

$$((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \rightarrow x_1$$

Aufgabe 4

Zeige die folgenden *Äquivalenzen*:

(a) $x_1 \rightarrow x_2 \equiv \neg x_1 \vee x_2$

(b) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden *Wahrheitstabellen*:

(a)

x_1	x_2	ϕ_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5 Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise

(b)

x_1	x_2	x_3	ϕ_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Gib Formeln ϕ_1 und ϕ_2 an, welche die Situation in den Wahrheitstabellen widerspiegeln.

Aufgabe 6

★

(a) Der *Sheffer stroke*¹, geschrieben als $\uparrow$, ist über folgende Wahrheitstabelle definiert:

$\hat{\nu}(\phi)$	$\hat{\nu}(\psi)$	$\hat{\nu}(\phi \uparrow \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Der Sheffer stroke wird also nur dann falsch, wenn beide Teilformeln wahr sind.

Beweise, dass sich Formeln der Art $\neg x_1$, $x_1 \wedge x_2$ und $x_1 \vee x_2$ *ausschließlich* durch den Sheffer stroke darstellen lassen.

Etwas genauer: Zeige, dass es Formeln $\rho_{\neg}$, $\rho_{\wedge}$, $\rho_{\vee}$ gibt, in denen als einziger Junktor der Sheffer stroke vorkommt, welche äquivalent zu obigen Formeln sind.

(b) Wandle die Formel $\phi := x_1 \rightarrow \neg x_2$ in eine äquivalente Formel nur mit Sheffer strokes um.

Aufgabe 7

Eine Informatikerin und eine MSTlerin sitzen im Fachschaftsraum und unterhalten sich. Eine der beiden sagt „Ich bin Informatikerin“. Daraufhin sagt die andere „Ich bin MSTlerin“. Wir wissen, dass mindestens eine der beiden lügt. Welche der folgenden Situationen sind möglich?

¹benannt nach Henry Maurice Sheffer, US-amerikanischer Logiker, 1882 - 1964

- (a) Die Informatikerin lügt aber die MSTlerin sagt die Wahrheit.
- (b) Die Informatikerin sagt die Wahrheit und die MSTlerin lügt.
- (c) Beide lügen.

Aufgabe 8

Wir betrachten die Zahlen 1, 2, 3, 4 und die folgenden Bedingungen über deren Anordnung:

- i) Wenn die 1 neben der 3 steht, dann ist die 3 nicht neben der 4.
 - ii) Die 2 neben der 4 oder die 3 ist neben der 1.
 - iii) Wenn die 2 nicht neben der 3 ist, dann ist die 4 nicht neben der 1.
 - iv) Die 2 hat nur einen Nachbar.
- (a) Gib eine Lösung für das obige Problem an, wenn es eine gibt. Ansonsten argumentiere, warum es keine gibt.
 - (b) Für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i < j$ sei N_{ij} ein Atom welches aussagt, dass i neben j steht (also links oder rechts daneben). Gib eine aussagenlogische Formel an, welche die obigen Bedingungen beschreibt.

Aufgabe 9

- (a) Negiere die folgenden Aussagen. Verwende dabei in der ersten Aussage nur den Existenz- und in der zweiten Aussage nur den All-Quantor:
 - i) Alle Studenten sind faul.
 - ii) Es gibt einen Studenten, der alle Übungsblätter bearbeitet.
- (b) Wir betrachten eine Aussage der Form $\forall x : P(x)$ (für alle x gilt irgendeine Aussage P). Zeige, dass sich eine Aussage dieser Form auch durch einen Existenz-Quantor darstellen lässt (unter Verwendung der aussagenlogischen Junktoren).

Tipp: Was darf nicht gelten, wenn eine Eigenschaft für alle Elemente gelten soll?

Aufgabe 10

★ In Definition 4.20 auf Seite 37 ist die Definition für die Konvergenz einer Folge in natürlicher Sprache angegeben. Formalisiere diese Aussage in der Logik der ersten Stufe. Gehe dabei von einer festen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer festen Zahl $a \in \mathbb{R}$ aus.

Aufgabe 11

Die leere Menge $\emptyset$ hat die Eigenschaft, dass $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A gilt.

Beweise, dass die leere Menge die einzige Menge ist, für die dies zutrifft, also dass es keine Menge $\emptyset' \neq \emptyset$ gibt mit $\emptyset' \subseteq A$ für jede Menge A .

Führe dazu einen *Widerspruchsbeweis*.

Aufgabe 12

Beweise mit *vollständiger Induktion*:

(a) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(b) $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

(c) Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2n < 2^n$? In diesem Fall startet die Induktion nicht mit 0, sondern erst mit der Zahl n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage gilt.

(d) Sei f_n die n -te Fibonacci-Zahl:

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

Aufgabe 13

Hierbei handelt es sich nicht um eine Aufgabe im eigentlichen Sinne sondern um ein kleines Gedankenspiel. Bereits in dem Kapitel über Mengenlehre haben wir geschrieben, dass die Mengenlehre, wie wir sie vorgestellt haben, nicht widerspruchsfrei ist. Einer der Widersprüche der naiven Mengenlehre ist als „Russellsche Antinomie“ bekannt. Eine Variante ist das sogenannte Barbier-Paradoxon welches von Bertrand Russell² formuliert wurde:

„In einem Dorf lebt ein Barbier. Dieser Barbier rasiert genau jene Männer des Dorfes, welche sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst?“

Mit ein wenig Nachdenken erhält man einen Widerspruch, die Definition der Menge ist jedoch erlaubt. Etwas formaler kann man die folgende Menge betrachten:

$T := \{X \mid X \notin X\}$ (die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten). Man kommt leicht zu dem Widerspruch $T \in T \Leftrightarrow T \notin T$.

Als Lösung verwendet man eine *axiomatische Mengenlehre*, wie zum Beispiel die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC)³.

²britischer Mathematiker und Philosoph, 1872-1970

³Wer mehr Informationen haben will kann sich z.B. <http://mathworld.wolfram.com/Zermelo-FraenkelAxioms.html> angucken