

Lösungen zum Mathevorkurs

Technische Fakultät

William Glover Martin Goth Thomas Liebetraut
Patricia Quellmalz Fabian Wenzelmann Jan Ole von Hartz



Autor*innen:

William Glover, Martin Goth, Thomas Liebetraut, Patricia Quellmalz, Fabian Wenzelmann, Jan Ole von Hartz

Lektor*innen:

Malte Ahl, Christian Schilling, Andreas Steffen, Leonie Feldbusch, Ann-Catherine Nölken, Hans Albert

Version:

2.4.1, September 2025

Kontakt:

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Fachschaft TF
Georges-Köhler-Allee 51
79110 Freiburg
`erstiorga@fachschaft.tf.uni-freiburg.de`

Lizenz:

Copyright © 2012 - 2020 William Glover, Martin Goth, Thomas Liebetraut, Patricia Quellmalz, Fabian Wenzelmann, Jan Ole von Hartz.

Dieses Skript ist veröffentlicht unter den Bedingungen der Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0) Lizenz.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0) License.

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Vorwort

Natürlich gehören zu einem echten Vorkurs auch Aufgaben, bei denen man das Gelernte selbst anwenden muss. Deswegen legen wir allen Teilnehmer*innen nahe, zu versuchen, die Aufgaben selbstständig zu lösen und sich die entsprechenden Stellen im Skript bei Bedarf noch einmal anzuschauen.

Die Übungsaufgaben sind so konzipiert, dass sie sich in der Regel ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner, Laptop etc. lösen lassen. Bei einigen Aufgaben werdet ihr dennoch ein Taschenrechner-Symbol  finden. Der Taschenrechner soll dabei nicht benutzt werden um die Lösung direkt zu berechnen und den eigentlichen Lösungsweg zu umgehen. Er soll nur ein Hilfsmittel sein um Rechnungen durchzuführen, die man nicht einfach so selbst machen kann. Z. B. sollte er nie benutzt werden um ein Integral automatisch zu bestimmen - er kann aber dann eingesetzt werden, wenn explizite Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Allgemein werdet ihr in den Vorlesungen und Übungen keine Taschenrechner verwenden. Auch in den Klausuren ist meist nur ein Stift als Hilfsmittel erlaubt.

Ihr werdet sicherlich auch feststellen, dass einige Aufgaben sehr einfach zu lösen sind während andere sehr viel schwerer sind - dies haben wir absichtlich so gemacht, damit ihr etwas kompliziertere Aufgabentypen zum „Knobeln“ habt. Besonders schwere Aufgaben sind mit einem ★ gekennzeichnet.

Inhaltsverzeichnis

1	Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre	5
2	Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen	13
3	Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis	19
4	Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra	41
5	Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise	51

1 Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$$

$$C = \{X, Y\}$$

$$D = \{\text{foo}, \text{bar}\}$$

$$E = \{\text{fo}\}$$

Bilde daraus die folgenden Mengen:

(a) $A \cap B$

(b) $B \cup A$

(c) $A \setminus C$

(d) $C \times A$

(e) $((A \cup B) \setminus (B \cap A)) \cup C$

(f) $\mathcal{P}(A)$

(g) $D \cup E$

(h) $D \setminus E$

Lösung

(a) $\{2, 4\}$

(b) $\{1, 2, 3, 4, 8, 16, 32\}$

(c) $\{1, 2, 3, 4\}$

(d) $\{(X, 1), (X, 2), (X, 3), (X, 4), (Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4)\}$

1 Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre

(e)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 16, 32\}$$

$$B \cap A = \{2, 4\}$$

$$(A \cup B) \setminus (B \cap A) = \{1, 3, 8, 16, 32\}$$

$$((A \cup B) \setminus (B \cap A)) \cup C = \{1, 3, 8, 16, 32, X, Y\}$$

(f)

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

(g) {foo, bar, fo}

(h) {foo, bar}

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind (echte) Teilmengen, (echte) Obermengen, gleiche Mengen, bzw. Potenzmengen voneinander?

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{9, 7, 5\}$$

$$C = \{7, 9, 5\}$$

$$D = \{\emptyset, \{7\}, \{9, 5\}, \{9, 7, 5\}, \{9\}, \{9, 7\}, \{7, 5\}, \{5\}\}$$

$$E = \{\emptyset, \{9, 7, 5\}, \{7\}, \{5\}, \{9, 1\}, \{9\}, \{7, 5\}\}$$

Lösung

Es ist:

1. $B \subset A$

2. $B \subseteq A$

3. $B \subseteq C$

4. $C \subseteq B$

5. $B = C$

6. $D = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(C)$

aber nicht

1. $B \subset C$

2. $C \subset B$

Die letzten beiden Mengen haben keinerlei Teilmengenbeziehung zu irgendeiner der anderen Mengen. Die Obermengenbeziehungen kann man direkt von den Teilmengenbeziehungen ablesen. Natürlich ist auch jede Menge Teilmenge (jedoch nicht echte!) von sich selbst.

Aufgabe 3

★ Auf der Ersti-Hütte¹ sollen Übungsblätter gelöst werden. Insgesamt nehmen 42 Studierende an der Ersti-Hütte teil (von denen jede*r mindestens ein Übungsblatt bearbeiten muss).

Davon müssen 30 Studierende ein Übungsblatt für Mathe I, 25 ein Übungsblatt für Informatik I und 20 ein Übungsblatt für Mechanik bearbeiten. 15 müssen sowohl Mathe I als auch Informatik I bearbeiten, 18 sowohl Mathe I als auch Mechanik und 5 sowohl Informatik I als auch Mechanik².

Wie viele Studierende müssen alle drei Übungsblätter bearbeiten? Wie viele müssen *mindestens* zwei Übungsblätter bearbeiten?

Tipp: Formuliere das Problem als ein mengentheoretisches Problem. Verwende dabei, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ bzw. umgeformt $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$ für endliche Mengen A, B .

Lösung

Definiere die folgenden Mengen:

$$S_1 := \{s \mid \text{Student*in } s \text{ muss Blatt für Mathe I bearbeiten}\}$$

$$S_2 := \{s \mid \text{Student*in } s \text{ muss Blatt für Informatik I bearbeiten}\}$$

$$S_3 := \{s \mid \text{Student*in } s \text{ muss Blatt für Mechanik bearbeiten}\}$$

Dann folgt aus der Aufgabenstellung, dass $|S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 42$ und:

$$|S_1| = 30$$

$$|S_2| = 25$$

$$|S_3| = 20$$

Definiere $S_{i,j} := S_i \cap S_j$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Aus der Aufgabenstellung:

$$|S_{1,2}| = 15$$

$$|S_{1,3}| = 18$$

$$|S_{2,3}| = 5$$

¹Informationen dazu auf der Fachschaftshomepage <http://fachschaft.tf/erstsemester/erstihuette>.

²Man frage nicht, wie es zu solch komischen Stundenplänen kommen konnte.

1 Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre

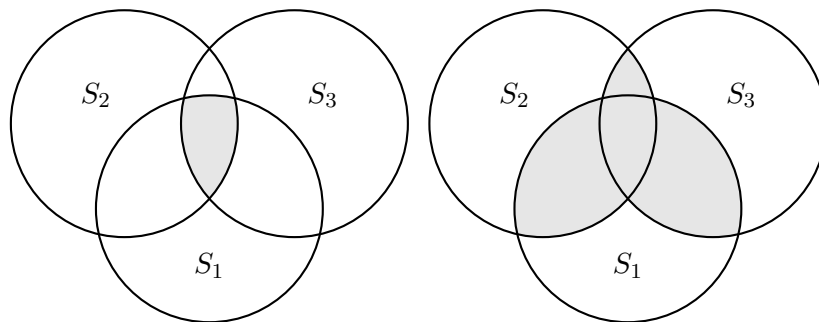
Mit dem Hinweis ergibt sich:

$$|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_{1,2}| = 30 + 25 - 15 = 40$$

$$|S_1 \cup S_3| = |S_1| + |S_3| - |S_{1,3}| = 30 + 20 - 18 = 32$$

$$|S_2 \cup S_3| = |S_2| + |S_3| - |S_{2,3}| = 25 + 20 - 5 = 40$$

Insgesamt ergibt sich folgendes Bild:



(a) Bild zum ersten Aufgabenteil

(b) Bild zum zweiten Aufgabenteil

Die Anzahl der Studierenden, die genau drei Blätter bearbeiten, ist dann (die grau markierte Fläche im ersten Bild):

$$\begin{aligned} & |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \\ &= |S_1| + |S_2 \cap S_3| - |S_1 \cup (S_2 \cap S_3)| \\ &= |S_1| + |S_2 \cap S_3| - |(S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)| \\ &= |S_1| + |S_2 \cap S_3| - (|S_1 \cup S_2| + |S_1 \cup S_3| - |S_1 \cup S_2 \cup S_3|) \\ &= |S_1| + |S_2 \cap S_3| - (|S_1 \cup S_2| + |S_1 \cup S_3| - |S_1 \cup S_2 \cup S_3|) \\ &= 30 + 5 - 40 - 32 + 42 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Die Mengen der Studierenden, die mindestens zwei Blätter bearbeiten, ist dann (die grau markierte Fläche im zweiten Bild):

$$S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$$

wir suchen also:

$$\begin{aligned} & |S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}| \\ &= |S_{1,2}| + |S_{1,3} \cup S_{2,3}| - |S_{1,2} \cap (S_{1,3} \cup S_{2,3})| \\ &= 15 + |S_{1,3}| + |S_{2,3}| - |S_{1,3} \cap S_{2,3}| - |S_{1,2} \cap (S_{1,3} \cup S_{2,3})| \\ &= 15 + 18 + 5 - \underbrace{|S_{1,3} \cap S_{2,3}|}_{(1)} - \underbrace{|S_{1,2} \cap (S_{1,3} \cup S_{2,3})|}_{(2)} \end{aligned}$$

In Nebenrechnungen bestimmen wir nun noch (1) und (2):

Zu (1):

$$\begin{aligned} |S_{1,3} \cap S_{2,3}| &= |S_1 \cap S_3 \cap S_2 \cap S_3| \\ &= |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \\ &= 5 \end{aligned}$$

und zu (2):

$$\begin{aligned} |S_{1,2} \cap (S_{1,3} \cup S_{2,3})| &= |((S_{1,2} \cap S_{1,3}) \cup (S_{1,2} \cap S_{2,3}))| \\ &= |(S_1 \cap S_2 \cap S_3) \cup (S_1 \cap S_2 \cap S_3)| \\ &= |S_1 \cap S_2 \cap S_3| \\ &= 5 \end{aligned}$$

In die Ursprungsformel eingesetzt erhalten wir damit $15 + 18 + 5 - 5 - 5 = 28$. Also müssen 28 Studierende mindestens zwei Übungsblätter bearbeiten.

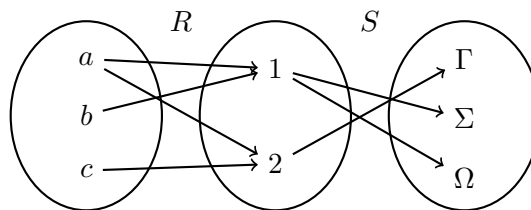
Etwas intuitiver: Wir addieren die Kardinalitäten der Schnittmengen und summieren diese auf, also $15 + 18 + 5$. Wir haben jedoch die Elemente, die im Schnitt aller drei Mengen liegen (5 Stück) insgesamt dreimal aufsummiert, müssen diese also noch zweimal abziehen.

Aufgabe 4

Gegeben seien die beiden Relationen R, S , wobei

$$\begin{aligned} R &\subseteq \{a, b, c\} \times \{1, 2\} \\ S &\subseteq \{1, 2\} \times \{\Gamma, \Sigma, \Omega\} \end{aligned}$$

in graphischer Notation:



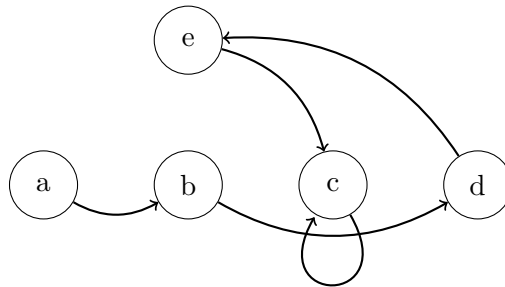
Bestimme $R \circ S$.

Lösung

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(a, \Gamma), (a, \Sigma), (a, \Omega) \\ &\quad (b, \Sigma), (b, \Omega) \\ &\quad (c, \Gamma)\} \end{aligned}$$

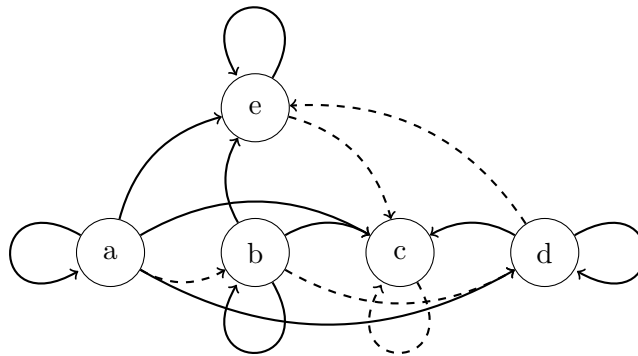
Aufgabe 5

Gegeben sei folgende Relation:



Vervollständige die Relation so, dass sie reflexiv und transitiv ist. Füge so wenige Pfeile wie möglich hinzu.

Lösung



Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden Relationen in graphischer Notation:

R_1 :



R_2 :



Überprüfe diese Relationen, die Relation $=$ auf den natürlichen Zahlen sowie die Relation $\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$ bezüglich aller Eigenschaften aus Definition 2.22 (Seite 16), wobei $R_1 \subseteq \{a, b\} \times \{a, b\}$ und $R_2 \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$.

	reflexiv	irreflexiv	symm.	antisymm.	transitiv
R_1					
R_2					
$= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$					
$\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$					

Lösung

	reflexiv	irreflexiv	symm.	antisymm.	transitiv
R_1	nein ¹	ja	ja	nein ²	nein ³
R_2	ja	nein ⁴	nein ⁵	ja	ja
$= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	ja	nein ⁶	ja	ja	ja
$\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$	nein ⁷	ja	ja ⁸	ja	ja

1 z. B. $(a, a) \notin R_1$

2 es ist $(a, b) \in R_1$ und $(b, a) \in R_1$ aber $a \neq b$

3 z. B. ist $(a, b) \in R_1$ und $(b, a) \in R_1$ aber $(a, a) \notin R_1$

4 z. B. ist $(a, a) \in R_2$

5 z. B. ist $(a, b) \in R_2$ aber $(b, a) \notin R_2$

6 z. B. ist $0 = 0$

7 $(a, a) \notin \emptyset$

8 Hierauf kann man vielleicht nochmal eingehen: Es kommt nie vor, dass ein Element in Relation zu einem anderen steht. Damit ist die Eigenschaft trivialerweise erfüllt.

Interessant: Was wäre, wenn man die Relation $\emptyset$ über der leeren Menge betrachtet, also $\emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset$? In diesem Fall gelten alle Eigenschaften von $\emptyset \subseteq \{a\} \times \{a\}$, die Relation wäre zusätzlich aber auch reflexiv.

Aufgabe 7

Beweise, dass die Kleinerrelation transitiv ist. Verwende dabei die formale Definition der Kleinerrelation (Def. 2.16 auf Seite 14).

1 Übungsaufgaben zum Kapitel Mengenlehre

Lösung

Sei $a < b$ und $b < c$. Dann gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ und $a + c_1 = b$ und $b + c_2 = c$. Also:

$$\begin{aligned} c &= b + c_2 \\ &= a + \underbrace{c_1 + c_2}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Also gibt es mit $c_3 := c_1 + c_2$ eine natürliche Zahl $c_3 \neq 0$ mit $a + c_3 = c$, also $a < c$. $\square$

2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

Aufgabe 1

Wir haben bereits gesehen, wie sich die *Addition* auf den natürlichen Zahlen formal definieren lässt (Definition 3.3 auf Seite 20). Gib ebenfalls eine formale Definition für die *Multiplikation* und *Potenzierung* an.

Lösung

Definiere für die Multiplikation (unter Verwendung der Addition):

$$\begin{aligned}n \cdot 0 &= 0 \\ n \cdot m^+ &= n \cdot m + n\end{aligned}$$

und für die Potenzierung (unter Verwendung der Multiplikation):

$$\begin{aligned}n^0 &= 1 \\ n^{m^+} &= n^m \cdot n\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bringe auf Dezimalform:

(a) $\frac{2^{80} \cdot 8^6}{16^{25}}$

(b) $\frac{1}{2400} + \frac{1}{1500} + \frac{1}{4000}$

Lösung

(a) $\frac{2^{80} \cdot 8^6}{16^{25}} = \frac{2^{80} \cdot 2^{18}}{2^{100}} = 2^{-2} = 0.25$



2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

(b)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2400} + \frac{1}{1500} + \frac{1}{4000} \\ &= \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{2^3 \cdot 5} \right) \\ &= \frac{1}{100} \left(\frac{5}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{8}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} \right) \\ &= \frac{1}{100} \cdot \frac{16}{2^3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{750} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bringe die folgenden komplexen Zahlen in die Form $a + ib$:

(a) $(5 + 3i) + (2 - 4i)$

(b) $6 \cdot (-2 + 5i)$

(c) $3i \cdot (1 + 5i)$

(d) $(3 + 6i) + 2 \cdot (4 - 3i)$

(e) $\frac{5+i}{2+3i}$

Bringe in Polarform

(A) $\sqrt{3} + 3i$

Lösung

(a) $(5 + 3i) + (2 - 4i) = (5 + 2) + (3i - 4i) = 7 - i$

(b) $6 \cdot (-2 + 5i) = -12 + 30i$

(c) $3i \cdot (1 + 5i) = (3i + (15i^2)) = (3i + (15 \cdot (-1))) = -15 + 3i$

(d) $(3 + 6i) + 2 \cdot (4 - 3i) = (3 + 6i) + (8 - 6i) = 11$

(e) $\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{13-13i}{13} = 1 - i$

(A) $\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arctan \frac{3}{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 4

Es sei $\ln(a) = 2$ und $\ln(b) = 3$. Berechne x .

(a) $x = \ln(ab) + \ln(a^3)$

(b) $x = \ln\left(\frac{1}{a^2}\right)$

(c) $ab^2 = e^{x^3}$

(d) $a^x = e^{84}$

(e) $x = a + b$

Lösung

(a) $\ln(ab) + \ln(a^3) = \ln(a) + \ln(b) + 3\ln(a) = 2 + 3 + 3 \cdot 2 = 11$

(b) $\ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = \ln(1) - \ln(a^2) = 0 - 2\ln(a) = -2 \cdot 2 = -4$

(c)

$$ab^2 = e^{x^3}$$

$$\ln(ab^2) = x^3$$

$$x^3 = \ln(a) + \ln(b^2) = \ln(a) + 2\ln(b) = 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

(d)

$$a^x = e^{84}$$

$$\ln(a^x) = 84$$

$$x \ln(a) = 84$$

$$x = \frac{84}{\ln(a)} = \frac{84}{2} = 42$$

(e)

$$x = a + b$$

$$\ln(a) = 2 \Rightarrow a = e^2$$

$$\ln(b) = 3 \Rightarrow b = e^3$$

$$x = e^2 + e^3 = e^2(1 + e) \approx 27.475$$

2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

Aufgabe 5

Vereinfache und berechne soweit möglich:

(a) $x^{2k-1} \cdot y^{k+1}(-x)^5 \cdot y$

(b) $3\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} - \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b^3}}{0.5}$

(c) $\sqrt{27x^2 - 9y} + \sqrt{3x^2 - y} + \sqrt{c^2 \cdot d^2} - c\sqrt{d^3} + \frac{cd^2}{\sqrt{d}}$

(d) $(2\sqrt{3} - 5\sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 3\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

(e) $\ln(x^5) - 4\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(f) $\ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{(ab)^{-1}} + \frac{1}{2} \ln b$

(g) $\frac{4}{\sqrt{8}}$

(h) $\frac{a^2 - ab}{a - b} - \frac{b}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{b}$

(i) $7.3 \cdot 10^{17} + \frac{5 \cdot 10^{21} + 4 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^4}$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} x^{2k-1} \cdot y^{k+1}(-x)^5 \cdot y &= x^{2k} \cdot x^{-1} \cdot y^k \cdot y^1 \cdot (-x)^5 \cdot y \\ &= -\frac{x^{2k} \cdot x^5}{x} \cdot y^k \cdot y^2 \\ &= -x^{2k} \cdot x^4 \cdot y^{k+2} \\ &= -x^{2(k+2)} \cdot y^{k+2} \\ &= -(x^2 \cdot y)^{k+2} \end{aligned}$$

(b) $3\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} - \sqrt{a} - \frac{\sqrt{b^3}}{0.5} = 2\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} - 2\sqrt{b \cdot b^2} = 2\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} - 2b\sqrt{b} = 2\sqrt{a}$

(c)

$$\begin{aligned} & \sqrt{27x^2 - 9y} + \sqrt{3x^2 - y} + \sqrt{c^2 \cdot d^2} - c\sqrt{d^3} + \frac{cd^2}{\sqrt{d}} \\ &= \sqrt{9(3x^2 - y)} + \sqrt{3x^2 - y} + cd - cd\sqrt{d} + \frac{cd^2\sqrt{d}}{\sqrt{d}\sqrt{d}} \\ &= 3\sqrt{3x^2 - y} + \sqrt{3x^2 - y} + cd - cd\sqrt{d} + \frac{cd^2\sqrt{d}}{d} \\ &= 4\sqrt{3x^2 - y} + cd - cd\sqrt{d} + cd\sqrt{d} \\ &= 4\sqrt{3x^2 - y} + cd \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{3} - 5\sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 3\sqrt{5}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 2 \cdot 3 + 2\sqrt{3} \cdot 5 - 5\sqrt{5} \cdot 3 - 5 \cdot 5 + 3\sqrt{5} \cdot 3 - 3 \cdot 5 \\ &= 6 + 2\sqrt{15} - 5\sqrt{15} - 25 + 3\sqrt{15} - 15 \\ &= -34 \end{aligned}$$

$$(e) \ln(x^5) - 4\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 5\ln(x) - 4\ln(x) + \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln x = 0$$

(f)

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{(ab)^{-1}} + \frac{1}{2} \ln b &= \ln(a^{\frac{1}{2}}) + \ln((ab)^{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \ln b \\ &= \frac{1}{2} \ln a + \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(ab) + \frac{1}{2} \ln b \\ &= \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) + \frac{1}{2} \ln b \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(g) \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{2^2}{\sqrt{2^3}} = \frac{2^2}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{2-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$(h) \frac{a^2 - ab}{a - b} - \frac{b}{b^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{b} = \frac{a(a - b)}{a - b} - \frac{b \cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = a - b$$



2 Übungsaufgaben zum Kapitel Zahlenmengen und Operationen

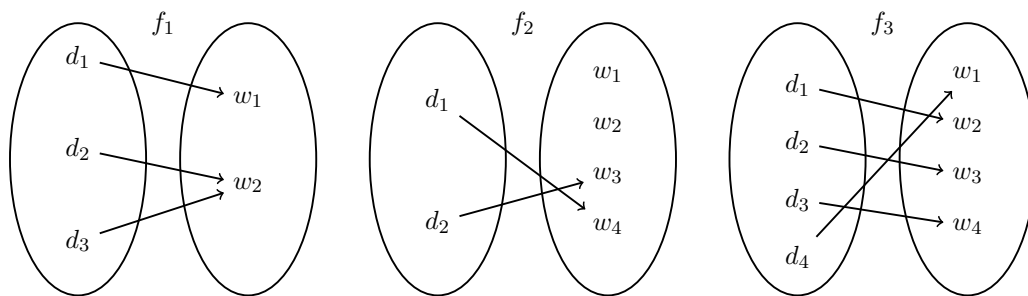
(i)

$$\begin{aligned}7.3 \cdot 10^{17} + \frac{5 \cdot 10^{21} + 4 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^4} &= 7.3 \cdot 10^{17} + \frac{5}{2} \cdot 10^{21-4} + \frac{4}{2} \cdot 10^{20-4} \\&= 7.3 \cdot 10^{17} + 2.5 \cdot 10^{17} + 2 \cdot 10^{16} \\&= 9.8 \cdot 10^{17} + 0.2 \cdot 10^{17} \\&= 10 \cdot 10^{17} \\&= 10^{18}\end{aligned}$$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Aufgabe 1

(a) Entscheide für die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv und bijektiv sind:



(b) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv / surjektiv? Wenn eine der Funktionen eine der Eigenschaften nicht erfüllt, so schränke Definitions- und / oder Wertebereich so ein, dass die Eigenschaft gilt.

- i) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^4$
- ii) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 5 \cdot \sin x$
- iii) $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(x) = 2 \cdot x$
- iv) $f_4 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f_4(x) = x$

Lösung

- (a) i) Nicht injektiv (w_2), aber surjektiv.
 ii) Injektiv, aber nicht surjektiv (w_1, w_2)
 iii) Bijektiv
- (b) i) Ist weder injektiv (da $f_1(x) = f_1(-x)$) noch surjektiv (da $f_1(x) \geq 0$).
 Die Funktion $f'_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wäre bijektiv (also injektiv und surjektiv).
 ii) Ist weder injektiv (da $f(0) = f(\pi) = 0$) noch surjektiv (da $\nexists x : f(x) = 6$).
 Die Funktion $f'_2 : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-5; 5]$ wäre bijektiv.
 iii) Ist injektiv, aber nicht surjektiv (nur gerade Zahlen erreicht, z. B. $f(n) \neq 3$).
 Surjektiv wäre die Funktion auf der Menge aller geraden natürlichen Zahlen.
 iv) Ist injektiv und surjektiv und damit bijektiv.

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Aufgabe 2

Was ist der Grenzwert der Folge $a_n := \frac{\sin n}{n}$? Beweise deine Behauptung mit der Definition des Grenzwertes.

Lösung

Der Beweis geht nahezu genauso wie für $\frac{1}{n}$ und der Grenzwert ist 0:
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Die erste Abschätzung folgt mit $|\sin n| \leq 1$.

Aufgabe 3

Berechne die Grenzwerte der folgenden Folgen:

- (a) $a_n = \frac{n+1}{n}$
- (b) $b_n = \frac{6n^3+2n^2+5n}{5n^3+n^2+100n}$
- (c) $c_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n+5}$
- (d) ★ $d_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Tip: „Geschick“ erweitern und die 3. binomische Formeln verwenden:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 2n^2 + 5n}{5n^3 + n^2 + 100n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{100}{n^2}} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Typischer Trick: Mit n^3 kürzen (immer das mit höchstem Exponenten).

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n + 5} &= \frac{4 + \frac{3^n}{4^n}}{1 + \frac{5}{4^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \frac{5}{4^n}} \\ &= \frac{4 + 0}{1 + 0} = 4\end{aligned}$$

(d) Wir wollen die 3. binomische Formel anwenden und erweitern daher mit $\sqrt{n^2 + n} + n$:

$$\begin{aligned}d_n &= \sqrt{n^2 + n} - n \\ &= \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &\stackrel{\text{binom.}}{=} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n}\end{aligned}$$

Jetzt können wir die üblichen Rechenregeln verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{n}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Folgen

$$a_n = 2n$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{n!}$$

Zeige, dass

(a) a_n streng monoton steigend ist.

(b) b_n streng monoton fallend ist (für $n \geq 1$).

Hinweis. Bei Folgen bedeutet streng monoton steigend (fallend), dass $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}2(n+1) &> 2n \\ \Leftrightarrow 2n+2 &> 2n \\ \Leftrightarrow 2 &> 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{(n+1)!} &< 1 + \frac{1}{n!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} &< \frac{1}{n!} \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{1}{n!} \cdot (n+1)! \\ \Leftrightarrow 1 &< n+1\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gib eine *rekursive* Berechnungsvorschrift für folgende Folgen an:

(a) 1, 4, 16, 64, 256, ...

(b) 1, 2, 1, 2, 1, ...

(c) 3, 5, 7, 9, 11, ...

Lösung

(a) $a_0 = 1, a_{n+1} = 4 \cdot a_n$. Die Folge ist $a_n = 4^n$.

(b) $b_0 = 1, b_{n+1} = (-1)^n + b_n$.

(c) $c_0 = 3, c_{n+1} = c_n + 2$.

Aufgabe 6

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned}a_0 &:= 1 \\ a_n &:= 2 \cdot a_{n-1} + 1\end{aligned}$$

Gib eine *explizite* Darstellung der Folge an, d. h. ohne Rekursion.

Lösung

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

Aufgabe 7

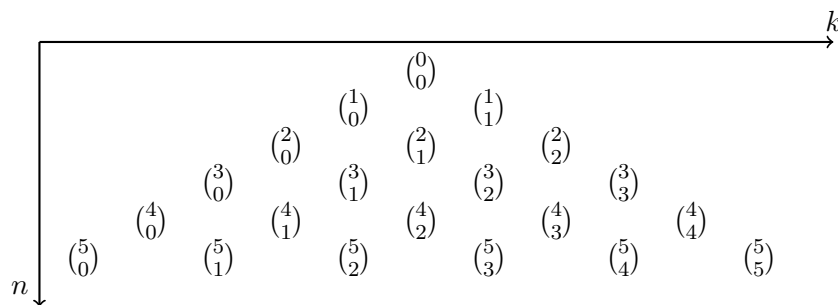
Der *Binomialkoeffizient*, geschrieben $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, ist definiert als die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Beispiel: Gegeben sei die vier elementige Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Dann sind alle *dreielementigen* Teilmengen: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ und folglich ist $\binom{4}{3} = 4$.

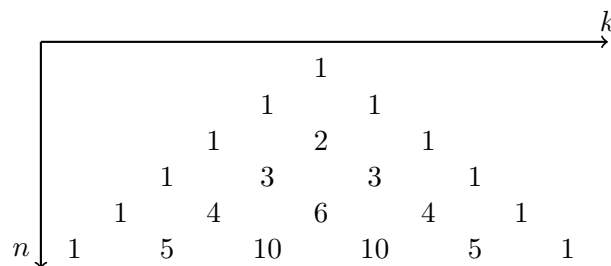
Für den Binomialkoeffizient gilt folgende Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{0}{k} &= 0 \text{ für } k \neq 0 \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\end{aligned}$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich im sogenannten *Pascalschen Dreieck*¹ anordnen und berechnen:



die entsprechenden Werte sind:



Füge zwei weitere Zeilen in das Dreieck ein. Gib an, wie mit Hilfe der Rekursionsgleichung ein Eintrag im Dreieck bestimmt wird.

¹benannt nach Blaise Pascal, französischer Mathematiker, 1623 - 1662

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Lösung

Die nächsten zwei Zeilen lauten

	1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1

An den Seiten rechts und links wird jeweils eine 1 eingefügt. Um einen inneren Eintrag zu berechnen (steht immer zwischen zwei Zahlen der darüberliegenden Zeile) addiert man die beiden Zahlen.

Aufgabe 8

Die m -te *Bell-Zahl*², geschrieben B_m , lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$B_0 = 1$$
$$B_{m+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k$$

Berechne B_5 .

Lösung

Wir füllen eine Tabelle nach und nach mit den bereits berechneten Bell-Zahlen

m	0	1	2	3	4	5
B_m	1					

Jetzt berechnen wir $B_1 = \binom{0}{0} \cdot B_0 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$

m	0	1	2	3	4	5
B_m	1	1				

Die fertige Tabelle:

m	0	1	2	3	4	5
B_m	1	1	2	5	15	52

²benannt nach Eric Temple Bell, schottischer Mathematiker, 1883 - 1960

Die Rechnungen im Detail:

$$B_2 = \binom{1}{0} \cdot 1 + \binom{1}{1} \cdot 1 = 1 + 1 = 2$$

$$B_3 = \binom{2}{0} \cdot 1 + \binom{2}{1} \cdot 1 + \binom{2}{2} \cdot 2 \\ = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$B_4 = \binom{3}{0} \cdot 1 + \binom{3}{1} \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot 2 + \binom{3}{3} \cdot 5 \\ = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

$$B_5 = \binom{4}{0} \cdot 1 + \binom{4}{1} \cdot 1 + \binom{4}{2} \cdot 2 + \binom{4}{3} \cdot 5 + \binom{4}{4} \cdot 15 \\ = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 52$$

Aufgabe 9

Ein Tennisball fällt aus einer Höhe von 5m zu Boden und springt danach auf eine Höhe von 4.2m zurück. Die wieder erreichte Höhe des Tennisballs verringert sich bei jedem weiteren Aufprall um den gleichen Prozentsatz. Berechne einerseits welche Höhe der Ball nach dem 12. Aufprall erreicht und andererseits ab dem wievielten Aufprall erstmals eine Höhe von 42cm nicht mehr überschritten wird.

Lösung

Nach jedem Sprung springt der Ball nur noch auf $\frac{4.2m}{5m} = 84\%$ der Ausgangshöhe. Also

$$h_1 = h_0 \cdot 0.84 \quad (\text{Nach dem ersten Aufprall})$$

$$h_2 = h_1 \cdot 0.84 = h_0 \cdot 0.84^2$$

$$h_3 = h_2 \cdot 0.84 = h_0 \cdot 0.84^3$$

$$\vdots$$

$$h_n = h_0 \cdot 0.84^n$$

Somit ist die Höhe nach dem 12ten Aufprall:

$$h_{12} = h_0 \cdot 0.84^{12} = 61.7cm$$

Für $h_x = 0.42m = 5m \cdot 0.84^x$ erhält man $x = \log_{0.84} \left(\frac{0.42}{5} \right) = \log_{0.84} 0.084 \approx 14.2$ also nach dem 15ten Aufprall.

Aufgabe 10

Berechne die folgenden Werte:

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

$$(a) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} ij$$

$$(b) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=2}^8 (2i + j)$$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} ij &= \sum_{i=1}^{10} i \left(\sum_{j=1}^{20} j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{20} j \right) \left(\sum_{i=1}^{10} i \right) \\ &= \left(\frac{20 \cdot 21}{2} \right) \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 10 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 11 \\ &= 11.550 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=2}^8 (2i + j) &= \sum_{i=1}^{10} \left(7 \cdot 2i + \sum_{j=2}^8 j \right) \\ &= 10 \cdot \left(\sum_{j=2}^8 j \right) + 14 \cdot \sum_{i=1}^{10} i \\ &= 10 \cdot \left(\sum_{j=1}^8 j - 1 \right) + 14 \cdot 55 \\ &= 10 \cdot (36 - 1) + 14 \cdot 55 \\ &= 1.120 \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Ordne jedem Graphen die korrekte Funktion zu

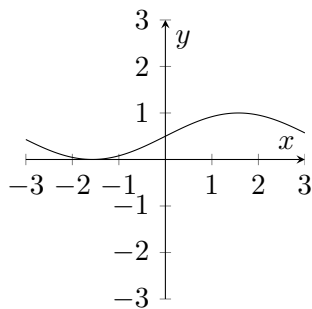
$$\begin{array}{lll} a(x) = \frac{(x-1)^2}{-5} + 1 & b(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2) & c(x) = \frac{1}{-2} + \cos(x) \frac{1}{2} \\ d(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) & e(x) = \frac{\sin(x)}{2} + 0.5 & f(x) = 2(x + 1)^2 \\ g(x) = -x^2 + 2 & h(x) = -x + 1 & i(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$$

$$j(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

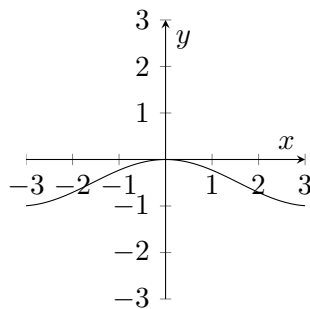
$$k(x) = \frac{7x}{2} - 1$$

$$l(x) = -x - 1$$

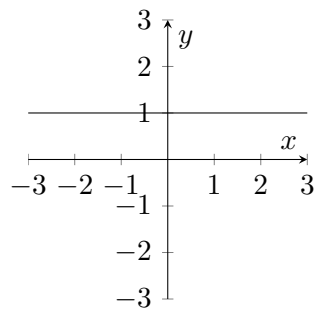
1.



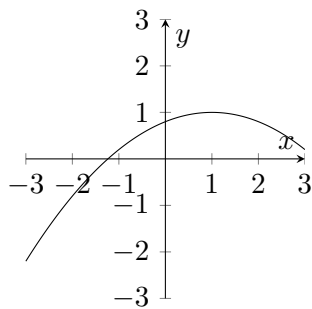
2.



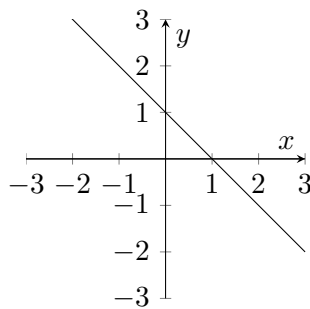
3.



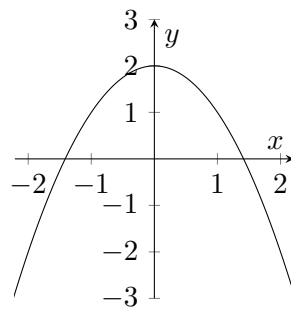
4.



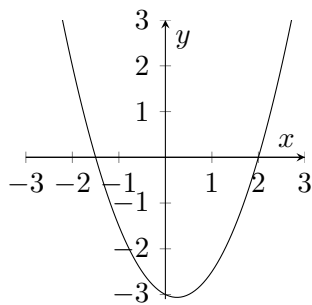
5.



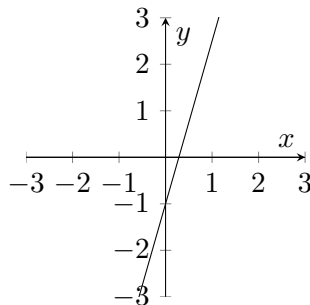
6.



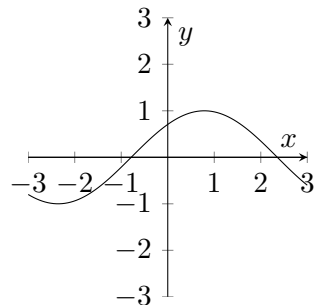
7.



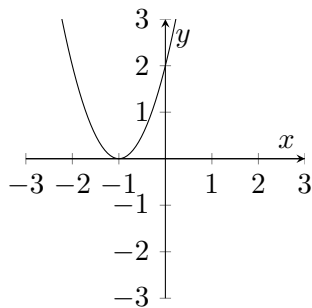
8.



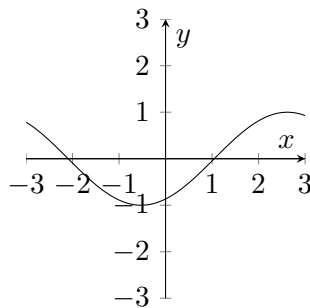
9.



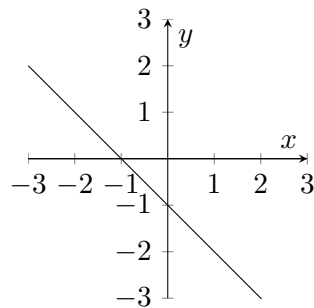
10.



11.



12.



3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Lösung

1. $e(x)$ 2. $c(x)$ 3. $d(x)$
4. $a(x)$ 5. $h(x)$ 6. $g(x)$
7. $b(x)$ 8. $k(x)$ 9. $i(x)$
10. $f(x)$ 11. $j(x)$ 12. $l(x)$

Aufgabe 12

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 + 4x^2 - 19x + 14$.

- (a) Gib die Horner-Darstellung des Polynoms an.
(b) ■■■ Verwende das Horner-Schema, um $p(x)$ in der Form $p(x) = (x-1)\hat{p}(x)$ darzustellen. Bestimme alle weiteren Nullstellen.

Lösung

- (a) Die Horner-Darstellung ist $14 + x(-19 + x(4 + x))$

- (b)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & -19 & 14 \\ & 1 & 5 & -14 \\ \hline 1 & 5 & -14 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x-1)(x^2 + 5x - 14)$$

Mit der pq -Formel bestimmen wir die weiteren Nullstellen von $p(x)$:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 14} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -7 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Sei $q(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$. Werte $q(4)$ unter Verwendung des Horner-Schemas aus und gib $q(x)$ in der Darstellung $q(x) = (x-4)\hat{q}(x) + q(4)$ an.

Lösung

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ & 8 & 32 & 116 & 468 \\ \hline 2 & 8 & 29 & 117 & 467 \end{array}$$

$$\text{Also } q(x) = (x-4)(2x^3 + 8x^2 + 29x + 117) + 467$$

Aufgabe 14

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 5x + 4$

(b) $f(x) = x^2 - 4$

(c) $f(x) = x^2 + 4x - 2.25$

(d) $f(x) = 7x^2 - x + 11$

(e) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x + 4}$

(f) $f(x) = x^3 - 2.5x^2 - 11x - 7.5$

(g) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Lösung

(a)

$$0 = 5x + 4$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

(b)

$$0 = x^2 - 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \sqrt{4} = \pm 2$$

(c)

$$0 = x^2 + 4x - 2.25 \text{ Mitternachtsformel}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 0.5$$

$$x_2 = -4.5$$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(d)

$$\begin{aligned} 0 &= 7x^2 - x + 11 \text{ Mitternachtsformel} \\ x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 308}}{14} \\ &= \frac{1 \pm i\sqrt{307}}{14} \end{aligned}$$

(e)

$$0 = \frac{x^2 - 8x + 16}{x + 4}$$

Der Bruch wird 0 gdw. der Zähler 0 ist:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 8x + 16 \\ 0 &= (x - 4)^2 \end{aligned}$$

Also Nullstelle bei $x = 4$.

(f) $0 = x^3 - 2.5x^2 - 11x - 7.5$

Die erste Nullstelle erraten wir durch ausprobieren und erhalten $x_1 = -1$.

Wir wenden das Horner-Schema an und erhalten für die Horner-Darstellung: $7.5 + x(-11 + x(-2.5 + x))$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -2.5 & -11 & -7.5 \\ & -1 & 3.5 & 7.5 \\ \hline 1 & -3.5 & -7.5 & 0 \end{array}$$

Also $f(x) = (x + 1)(-x^2 + 3.5x + 7.5)$. Für den „hinteren Teil“ wenden wir die Mitternachtsformel an und erhalten:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-3.5 \pm \sqrt{12.25 + 30}}{-2} \\ &= \frac{-3.5 \pm 6.5}{-2} \\ x_2 &= 5 \\ x_3 &= -1.5 \end{aligned}$$

(g) $0 = x^4 - 13x^2 + 36$

Wir substituieren $x^2 = u$ und erhalten $0 = u^2 - 13u + 36$. Mit der Mitternachtsformel erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} \\ &= \frac{13 \pm 5}{2} \\ u_1 &= 9 \\ u_2 &= 4 \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution folgt:

Für u_1 : $x^2 = 9$ also $x_{1,2} = \pm 3$ und für u_2 : $x^2 = 4$ also $x_{3,4} = \pm 2$.

Aufgabe 15

Gib die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen an:

- (a) $2 \ln(x^4)$
- (b) $x^x = e^{x \ln x}$ für $x > 0$
- (c) $\frac{x+3}{\sqrt{\cos x}}$
- (d) $(x\sqrt{2} - x^2)^3$
- (e) $\frac{a+1}{(a^2 - x + x^2)^2}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$
- (f) $(1-x)^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- (g) $(x-x^2)^3 (1+3x)^2$
- (h) $\sqrt{x^3 + x + 1}$
- (i) $\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{1-x}}$

Lösung

(a) $(2 \cdot \ln(x^4))' = 2 \cdot (\ln(x^4))'$

Jetzt kommt $\ln x^4$

$$\ln(x^4)' = \begin{cases} g(x) = \ln x \\ h(x) = x^4 \end{cases} = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 = \frac{4}{x}$$

und damit ist die gesamte Ableitung: $\frac{8}{x}$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(b)

$$\begin{aligned}(x^x)' &= \left(e^{x \ln x}\right)' \\&= \begin{cases} g(x) = e^x \\ h(x) = x \ln x \end{cases} \\&= e^{x \ln x} \cdot (\ln(x) + 1) \\&= x^x (\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

Hinweis. $x \ln x$ war schon ein Beispiel im Skript.

(c) Wir bestimmen schon einmal $(\sqrt{\cos x})'$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{\cos x})' &= \begin{cases} g(x) = \sqrt{x}, g' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ h(x) = \cos x, h' = -\sin x \end{cases} \\&= -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\end{aligned}$$

und jetzt die eigentliche Funktion:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{\sqrt{\cos x}} &= \begin{cases} g(x) = x+3, g' = 1 \\ h(x) = \sqrt{\cos x}, h' = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \end{cases} \\&= \frac{\sqrt{\cos x} + (x+3) \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}f(x)' &= \begin{cases} g(x) = x^3, g'(x) = 3x^2 \\ h(x) = x\sqrt{2} - x^2, h'(x) = \sqrt{2} - 2x \end{cases} \\&= 3(x\sqrt{2} - x^2)^2 \cdot (\sqrt{2} - 2x)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} g(x) = a+1, g'(x) = 0 \\ h(x) = (a^2 - x + x^2)^2, h'(x) = \underbrace{2(a^2 - x + x^2)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(-1 + 2x)}_{\text{innere Ableitung}} \end{cases} \\&= \frac{0 - (a+1) \cdot 2(a^2 - x + x^2)(2x-1)}{(a^2 - x + x^2)^4} \\&= \frac{-2(a+1)(2x-1)}{(a^2 - x + x^2)^3}\end{aligned}$$

(f) Wir leiten zuerst die beiden Faktoren ab:

$$\begin{aligned}\left((1-x)^2\right)' &= \begin{cases} g(x) = x^2, g'(x) = 2x \\ h(x) = 1-x, h'(x) = -1 \end{cases} \\ &= 2 \cdot (1-x) \cdot (-1) \\ &= 2x - 2 \\ \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)' &= \begin{cases} g(x) = \cos(x), g'(x) = -\sin(x) \\ h(x) = \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot x, h'(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} g(x) = (1-x^2), g'(x) = 2x-2 \\ h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), h'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \\ &= (1-x^2) \left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + (2x-2) \cos\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

(g) Wieder zuerst die Faktoren:

$$\begin{aligned}\left((x-x^2)^3\right)' &= \begin{cases} g(x) = x^3, g'(x) = 3x^2 \\ h(x) = x-x^2, h'(x) = 1-2x \end{cases} \\ &= 3(x-x^2)^2 \cdot (1-2x) \\ \left((1+3x)^2\right)' &= \begin{cases} g(x) = x^2, g'(x) = 2x \\ h(x) = 1+3x, h'(x) = 3 \end{cases} \\ &= 2 \cdot (1+3x) \cdot 3 \\ &= 6(1+3x)\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} g(x) = (x-x^2)^3, g'(x) = 3(x-x^2)^2(1-2x) \\ h(x) = (1+3x)^2, h'(x) = 6(1+3x) \end{cases} \\ &= (x-x^2)^3 6(1+3x) + 3(x-x^2)^2(1-2x)(1+3x)^2 \\ &= 3\left(2(x-x^2)^3(1+3x) + (x-x^2)^2(1-2x)(1+3x)^2\right)\end{aligned}$$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(h)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} g(x) = \sqrt{x}, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ h(x) = x^3 + x + 1, h'(x) = 3x^2 + 1 \end{cases} \\ &= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x + 1}} \end{aligned}$$

(i) Zuerst die beiden Funktionen des Bruchs:

$$\begin{aligned} \left((2x+1)^2\right)' &= \begin{cases} g(x) = x^2, g'(x) = 2x \\ h(x) = 2x+1, h'(x) = 2 \end{cases} \\ &= 2 \cdot (2x+1) \cdot 2 \\ &= 4(2x+1) \\ \left(\sqrt{1-x}\right)' &= \begin{cases} g(x) = \sqrt{x}, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ h(x) = 1-x, h'(x) = -1 \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

Die gesamte Funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} g(x) = (2x+1)^2, g'(x) = 4(2x+1) \\ h(x) = \sqrt{1-x}, h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \end{cases} \\ &= \frac{4(2x+1)\sqrt{1-x} + \frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}^2} \\ &= \frac{4(2x+1)\sqrt{1-x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2}(2x+1)(2x+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot (2x+1) \left(4(1-x) + \frac{1}{2}(2x+1)\right)}{\sqrt{1-x}^2} \\ &= \frac{(2x+1)(4-4x+x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x}^3} \\ &= \frac{(2x+1)(-3x+4.5)}{\sqrt{1-x}^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 16

■ Berechne die Fläche A zwischen der größten und kleinsten Nullstelle von

$$f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{16-x^2}$$

Lösung

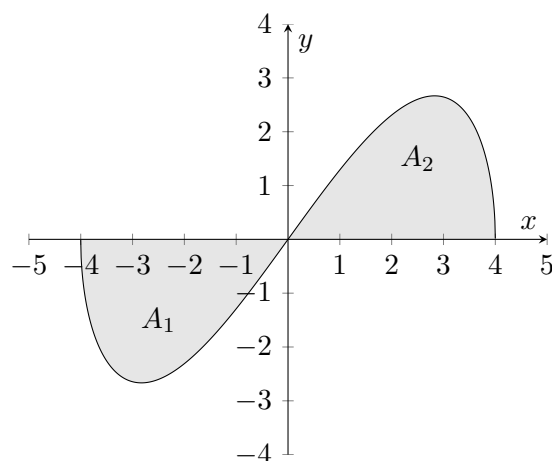
Zuerst bestimmen wir die Nullstellen. Die Funktion wird 0 gdw. mind. einer der beiden Faktoren 0 wird.

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow x_0 = 0 \\ \sqrt{16 - x^2} = 0 &\Leftrightarrow 16 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 16 \\ &\Rightarrow x_2 = -4, x_3 = 4\end{aligned}$$

Es gibt also drei Nullstellen und einen Vorzeichenwechsel bei $x = 0$.

Hinweis. Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ auch zwischen den Grenzen stets definiert: $|x| \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 16$.

Hier noch ein kleiner Plot der Funktion:



3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

Wir bestimmen das Integral (unter Verwendung von Substitution):

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{3} \sqrt{16 - x^2} \, dx &= \frac{1}{3} \int x \sqrt{16 - x^2} \, dx \\&= \begin{cases} u = 16 - x^2 \\ u' = -2x \, dx \end{cases} \\&= -\frac{1}{6} \int -2x \sqrt{16 - x^2} \, dx \\&= -\frac{1}{6} \int \sqrt{u} \, du \\&= -\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \\&= -\frac{1}{9} u^{\frac{3}{2}} \\&= -\frac{1}{9} (16 - x^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Wir bestimmen die Teilflächen A_1 und A_2 sowie die Gesamtfläche A :

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{-4}^0 f(x) \, dx \\&= -\frac{1}{9} (16 - 0^2)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{9} (16 - 16)^{\frac{3}{2}} \right) \\&= -\frac{64}{9} \\A_2 &= \int_0^4 f(x) \, dx \\&= -\frac{1}{9} (16 - 16)^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{9} (16 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) \\&= \frac{64}{9} \\A &= |A_1| + |A_2| = 2 \cdot \frac{64}{9} = \frac{128}{9}\end{aligned}$$

Aufgabe 17

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int x^2 e^x \, dx$

(b) $\int x \cos x \, dx$

(c) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

$$(d) \int (2x + 8)^7 dx$$

$$(e) \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$(f) \int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx$$

$$(g) \int \sqrt{e^{-x}} dx$$

$$(h) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + 4)^2}} dx$$

$$(i) \int \frac{1}{x^2} \ln x dx$$

$$(j) \int x e^{2x} dx$$

Lösung

(a) Wir lösen durch zweimaliges partielles Integrieren

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \begin{cases} f(x) = e^x, f'(x) = e^x \\ g(x) = x^2, g'(x) = 2x \end{cases} \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (e^x \cdot (x - 1)) \end{aligned}$$

(b) Auch hier lösen wir durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= \begin{cases} f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x \\ g(x) = x, g'(x) = 1 \end{cases} \\ \int x \cdot \cos x dx &= \sin x \cdot x - \int \sin x dx \\ &= x \sin(x) + \cos x \end{aligned}$$

(c) Und weil wir es bisher noch gar nicht gemacht haben: Lösen durch Part. Int.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \begin{cases} f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2} \\ g(x) = \ln x, g'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \\ \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln x + 1}{x} \end{aligned}$$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(d) Diese Aufgabe lösen wir durch Anwenden des Substitutionsverfahrens

$$\begin{aligned}\int (2x+8)^7 dx &= \begin{cases} u = 2x+8 \\ u' = 2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int u^7 du \\ &= \frac{u^8}{8} \\ &= \frac{1}{8} (2x+8)^8 \\ &= \frac{1}{8} \cdot 2^8 (x+4)^8 \\ &= 16 \cdot (x+4)^8\end{aligned}$$

Das geübte Auge kann bei Substitutionsaufgaben manchmal „sehen“, dass das Integral die Form u^7 hat. Wenn man dann die innere Ableitung in den Zähler schreibt (und das Integral nicht komplizierter wird) und die äußere Funktion integriert, ist man schnell fertig. Insbesondere bei Exponentialfunktionen kommt dieser Fall häufiger vor.

(e) Wir lösen durch Substitution

$$\begin{aligned}\int e^x \sqrt{e^x+1} dx &= \begin{cases} u = e^x+1 \\ u' = e^x dx \end{cases} \\ &= \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} (e^x+1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(f) Wieder Substitution

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx &= \begin{cases} u = \ln x \\ u' = \frac{1}{x} dx \end{cases} \\ &= \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(g) Wieder Substitution

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^{-x}} \, dx &= \int \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} \sqrt{e^{-x}} \, dx \\&= \begin{cases} u = e^{-x} \\ u' = -e^{-x} \, dx \end{cases} \\&= \int \frac{1}{-u} \sqrt{u} \, du \\&= - \int \frac{u^{\frac{1}{2}}}{u} \, du \\&= - \int u^{-\frac{1}{2}} \, du \\&= - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\&= -2\sqrt{u} \\&= -2\sqrt{e^{-x}}\end{aligned}$$

(h) Die gute Substitution mal wieder

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+4)^2}} &= \begin{cases} u = x^3 + 4 \\ u' = 3x^2 \, dx \end{cases} \\&= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} \, du \\&= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{2}{3}} \, du \\&= \frac{1}{3} \cdot 3u^{\frac{1}{3}} \\&= \sqrt[3]{u} \\&= \sqrt[3]{x^3+4}\end{aligned}$$

(i) Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx &= \begin{cases} g(x) = \ln x, g'(x) = \frac{1}{x} \\ f'(x) = \frac{1}{x^2}, f(x) = \int x^{-2} = -x^{-1} \end{cases} \\&= -\frac{\ln x}{x} - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\&= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} \, dx \\&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \\&= -\frac{\ln(x) + 1}{x}\end{aligned}$$

3 Übungsaufgaben zum Kapitel Analysis

(j) Zum Abschluss nochmal Partielle Integration

$$\begin{aligned}\int x e^{2x} dx &= \begin{cases} g(x) = x, g'(x) = 1 \\ f'(x) = e^{2x}, f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \\ &= \frac{e^{2x} x}{2} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{e^{2x} x}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} (2x - 1)}{4}\end{aligned}$$

4 Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra

Aufgabe 1

Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechne die folgenden Werte:

(a) $u \cdot v$

(b) uv^T

Lösung

(a) $u \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$

(b) $uv^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Beweise, dass das Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ weder kommutativ noch assoziativ ist.

Lösung

Wir geben jeweils ein Gegenbeispiel an.

Kommutativität:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \neq$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4 Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra

Assoziativität:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 - -4 \cdot 1 \\ -4 \cdot 4 - -4 \cdot 1 \\ -4 \cdot 1 - 8 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -36 \end{pmatrix} \neq \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -5 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot -5 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Falls nicht, gib die nicht trivialen Linearfaktoren an, mit denen sich der Nullvektor erzeugen lässt.

- (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung

- (a) Der dritte Vektor ist -2 mal der erste. Also sind die drei Vektoren (unabhängig vom zweiten) linear abhängig.
- (b) Es gibt keine drei Skalare, mit denen einer der Vektoren durch Summe der beiden anderen dargestellt werden kann. Also ist das Vektorentupel linear unabhängig.

Die eigentlich richtig saubere Lösung: Lineares Gleichungssystem lösen.

Aufgabe 4

- (a)  Wähle unter den folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus. Wähle also drei Vektoren, welche linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

- (b) Ergänze die folgenden beiden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$, finde also einen weiteren Vektor v_3 , sodass die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- (c) Ergänze die folgenden Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$, finde also zwei weitere Vektoren v_3, v_4 , sodass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig sind.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

- (a) Wir probieren zuerst die ersten drei Vektoren. Man löst und sieht, dass $2v_2 - v_1 = v_3$.

Wir raten v_1, v_2, v_4 . Sind diese Vektoren linear unabhängig, so muss jede Linearkombination von 0 verschieden sein. Mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_4$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II-III} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot I - II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

und sehen, dass das LGS eindeutig lösbar ist (Stufenform).

Alternativ benutzen wir folgenden Satz. Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Determinante des LGS verschieden von 0 ist. Die Determinante erhalten wir mit der Regel von Sarrus.

Beispiel: Das LGS für v_1, v_2, v_3 hat die Determinante

$$\underbrace{1 \cdot 5 \cdot 9}_{45} + \underbrace{2 \cdot 6 \cdot 7}_{84} + \underbrace{3 \cdot 4 \cdot 8}_{96} - \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 3}_{105} - \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 1}_{48} - \underbrace{9 \cdot 4 \cdot 2}_{72} = 0.$$

Lösung: Das LGS für v_1, v_2, v_4 hat die Determinante

$$\underbrace{1 \cdot 5 \cdot (-12)}_{-60} + \underbrace{2 \cdot 6 \cdot 10}_{120} + \underbrace{3 \cdot 4 \cdot 11}_{132} - \underbrace{10 \cdot 5 \cdot 3}_{150} - \underbrace{11 \cdot 6 \cdot 1}_{66} - \underbrace{(-12) \cdot 4 \cdot 2}_{-96} = 72 \neq 0.$$

Anmerkung: Man sieht schön, dass man die Rechnung teilweise behalten kann, es ändert sich immer nur der c -Faktor aus der Sarrus-Regel.

- (b) Eine mögliche Lösung für $v_3 := (a_1, a_2, a_3)^T$ ist z.B. $a_1 := a_2 := a_3 := 1$. Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu sehen.

Raten: Man sieht, dass sich v_1 und v_2 nur im ersten Eintrag unterscheiden.

Trick: Der Nullvektor entsteht als Linearkombination mit

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = a_1 \cdot \lambda_3 \\ 7 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = a_2 \cdot \lambda_3 \\ 8 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) = a_3 \cdot \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen insbesondere $7\lambda_3^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2) = a_2$ und $8\lambda_3^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2) = a_3$ oder für $\Lambda := \lambda_3^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2)$ kurz $7\Lambda = a_2$ und $8\Lambda = a_3$. Wählen wir jetzt $a_2 = a_3 \neq 0$, findet man keine passenden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

alle Lösungen: Wir benutzen die Idee aus (a) und stellen das LGS auf. Die Regel

von Sarrus liefert für $\begin{pmatrix} 5 & 4 & a_1 \\ 7 & 7 & a_2 \\ 8 & 8 & a_3 \end{pmatrix}$ dann

$$\underbrace{5 \cdot 7 \cdot a_3}_{35a_3} + \underbrace{7 \cdot 8 \cdot a_1}_{56a_1} + \underbrace{8 \cdot 4 \cdot a_2}_{32a_2} - \underbrace{a_1 \cdot 7 \cdot 8}_{56a_1} - \underbrace{a_2 \cdot 8 \cdot 5}_{40a_2} - \underbrace{a_3 \cdot 4 \cdot 7}_{28a_3} = 7a_3 - 8a_2 \stackrel{!}{\neq} 0.$$

Alle Vektoren, die diese Ungleichung erfüllen, sind somit Lösungen.

- (c) Für dieses Beispiel sieht man, dass mit $v_3 := (1, 0, 1, 0)^T$ und $v_4 := (1, 0, 0, 0)^T$ das

$$\text{LGS } (v_4 \ v_3 \ v_2 \ v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{vertausche Zeilen}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eindeutig lösbar}$$

ist.

Als Lösungsweg kann man diese Operation für parametrische v_3, v_4 durchführen und später die gültigen Werte einsetzen, man braucht nur die Idee, dass Zeile 2 nach unten geschoben wird. Jede 1 darf dabei natürlich auch alle anderen Werte verschieden von 0 annehmen.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \\ -2 & -8 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne $(2 \cdot (A + B))C$.

Lösung

Zuerst bestimmen wir $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 2+2 & 3+1 \\ 3+7 & 4-1 & 4+0 \\ -2-2 & 0-8 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 10 & 3 & 4 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt die Skalarmultiplikation

$$2 \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 10 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot -4 & 2 \cdot -8 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 20 & 6 & 8 \\ -8 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 20 & 6 & 8 \\ -8 & -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 68 & -8 & 4 \\ 64 & 92 & -44 & 14 \\ -24 & -196 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Berechne die Determinante von A mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

Zeilenentwicklung nach der 3. Zeile:

$$\det(A) = (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (6 + 1 + 16 - 4 - 3 - 8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{Z}^{7 \times 7}$ eine Matrix die aus drei Matrizen $D_1 \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$, $D_2 \in \mathbb{Z}^{1 \times 1}$, $D_3 \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ besteht und sonst nur aus 0-en:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{3 \ 4 \ 6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \ 2 \ 5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1 \ 0 \ 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2 \ 1 \ 0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2 \ 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

Berechne die Determinante von A mit $\det(A) = \det(D_1) \cdot \det(D_2) \cdot \det(D_3)$.

Lösung

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = (-1), D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(D_1) = 6 + 0 + 20 - 0 - 12 - 4 = 10 \text{ (Sarrus)}$$

$$\det(D_2) = -1$$

$$\det(D_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\det(A) = 10 \cdot (-1) \cdot 8 = -80$$

Aufgabe 8

Löse die folgenden beiden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 6x_1 + 11x_3 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) bereits in Matrizenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Lösung

(a) Die Matrix sieht folgendermaßen aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 11 & -7 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 11 & -7 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{III-I} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Matrix ist in Stufenform, wir können nun durch Substitution einfach die Lösungen berechnen:

$$\begin{aligned} 6x_3 &= 6 \Leftrightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 1 &= -5 \Leftrightarrow x_2 = -3 \\ 3x_1 + 3 + 8 &\Leftrightarrow x_1 = -3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{IV-I} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{IV-\frac{1}{3}II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{IV-\frac{1}{3}III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Matrix ist in Stufenform. Wir betrachten zuerst die dritte Zeile. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ -3x_2 &= 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ x_1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + x_4 &= 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \end{aligned}$$

Damit gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich für $a \in \mathbb{R}$:

$$x_1 = a, x_2 = x_3 = 0, x_4 = -a.$$

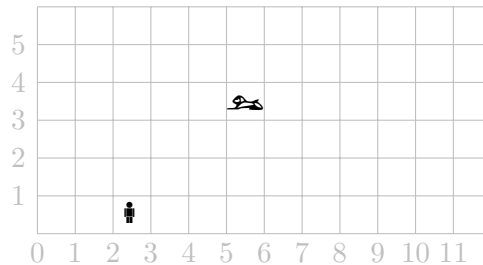
Aufgabe 9

Wir betrachten ein einfaches 2D Computerspiel. Ein portugiesischer Bäckermeister befindet sich in dem Spielfeld auf der Position $r_0 = (2, 0)^T$. Die Spielfigur hüpfte hoch und bewegt sich dabei mit einer Geschwindigkeit von $v = (1, 2)^T$ vorwärts, d.h. in einem Zeitabschnitt bewegt sich die Figur um ein Feld nach rechts und zwei Felder nach oben. Durch die Gravitation verlangsamt sich jedoch die Geschwindigkeit in jedem Zeitabschnitt nach der Bewegung, die Beschleunigung soll $a = (0, -0.5)^T$ betragen.

- Gib eine Formel für die Position $r_t, t \in \mathbb{N}$ der Spielfigur nach t Zeitschritten an.
- An welcher Position befindet sich die Spielfigur nach $t = 7$ Zeitschritten?
- Nehmen wir an, dass unser Bäckermeister eine Pusteblume verspeist hat und nun Feuerbälle schießen kann. Auf dem Feld $(5, 3)^T$ befindet sich ein Gegner und der Feuerball fliegt in einem Winkel $\alpha = 0.75$ von Punkt $(3, 1)^T$ aus. Wird der Feuerball durch das Feld des Gegners fliegen? Der Feuerball wird nicht von der Gravitation beeinflusst.

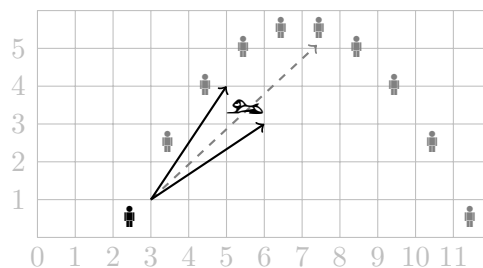
4 Übungsaufgaben zum Kapitel Lineare Algebra

Auf einem Feld befinden soll hier immer bedeuten, dass das komplette Feld von der Figur eingenommen wird, unser Held belagert also das Feld welches von $(2,0)^T$ bis nach $(3,1)^T$ reicht, siehe auch folgende Abbildung:



Lösung

Zuerst einmal ein bisschen Anschauungsmaterial:



- (a) Normalerweise würde man so etwas wohl über ein Integral lösen. In diesem Fall reicht es aber aus, die Aufgabe mit Vektoroperationen zu lösen.

Wir überlegen uns, wie sich die Position verändert. Nach einem Zeitschritt müssen wir die Geschwindigkeit zu der aktuellen Position dazu addieren.

Im nächsten Zeitschritt wird von der aktuellen Geschwindigkeit die Beschleunigung dazu gezählt und diese verringerte Geschwindigkeit erneut dazu addiert. Es ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_0 + v \\
 r_2 &= \underbrace{r_0 + v}_{r_1} + \underbrace{v + a}_{\text{verringert um } a} \\
 r_3 &= \underbrace{r_0 + v + v + a}_{r_2} + \underbrace{v + 2a}_{\text{zwei Mal verringert}}
 \end{aligned}$$

Verfolgt man das Muster weiter erhält man:

$$\begin{aligned}
 r_t &= r_0 + \sum_{i=1}^t v + (i-1)a \\
 &= r_0 + tv + \sum_{i=1}^t (i-1)a \\
 &= r_0 + tv + a \sum_{i=1}^t (i-1) \\
 &= r_0 + tv + a \sum_{i=1}^{t-1} i \\
 &= r_0 + tv + a \frac{(t-1)t}{2}
 \end{aligned}$$

(b) Eingesetzt in unsere Formel erhalten wir:

$$r_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} 21 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

(c) Wir überlegen uns zuerst welche Winkel erlaubt sind um in das Feld mit dem Gegner zu treffen. Der größte Winkel α_1 wird erreicht, wenn der Held durch den Punkt $(5, 4)^T$ schießt. Der kleinste Winkel α_2 wird erreicht, wenn der Held durch den Punkt $(6, 3)^T$ schießt. Die entsprechenden Vektoren die vom Punkt $(3, 1)^T$ dorthin führen sind $(2, 3)^T$ und $(3, 2)^T$.

Wir müssen also den Winkel zwischen den oben genannten Vektoren und der Horizontalen bestimmen, wir verwenden dafür den Vektor $(1, 0)^T$ (egal welcher, hauptsache einer der in die richtige Richtung zeigt).

Wir wissen, dass $u \cdot v = \cos(\angle(u, v)) \cdot \|u\| \|v\|$, also $\cos(\angle(u, v)) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_1 &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \approx 0.5547 \\
 \arccos 0.5547 &\approx 0.9828 = \alpha_1
 \end{aligned}$$

Analog dazu berechnet man $\alpha_2 \approx 0.588$. Damit trifft der Feuerball das Feld des Gegners.

5 Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise

Aufgabe 1

Zeige, dass die folgende Formel *nicht erfüllbar* ist:

$$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \wedge \neg (x_1 \vee x_2)$$

Lösung

Erstelle die Wahrheitstabelle:

x_1	x_2	$\neg x_2$	$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2)$	$x_1 \vee x_2$	$\neg (x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \wedge \neg (x_1 \vee x_2)$
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Da die letzte Spalte immer 0 ist folgt, dass die Formel nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 2

Gib alle Belegungen ν der folgenden Formel ϕ an für die gilt $\hat{\nu}(\phi) = 0$:

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \rightarrow x_2)$$

Lösung

Wieder mal eine Wahrheitstabelle:

x_1	x_2	x_3	$\neg x_2$	$x_1 \wedge \neg x_2$	$x_3 \rightarrow x_2$	$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \rightarrow x_2)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

5 Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise

Damit ist die einzige Belegung, die die Formel nicht wahr macht, gegeben durch:
 $\nu_1 = \{x_1 \mapsto 0, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 1\}$.

Aufgabe 3

Zeige, dass die folgende Formel eine *Tautologie* ist:

$$((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \rightarrow x_1$$

Lösung

Man erstellt wieder die Wahrheitstabelle:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$(x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1$	$((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1) \rightarrow x_1$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Da in der letzten Spalte immer eine 1 steht, folgt, dass die Formel eine Tautologie ist.

Aufgabe 4

Zeige die folgenden *Äquivalenzen*:

(a) $x_1 \rightarrow x_2 \equiv \neg x_1 \vee x_2$

(b) $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$

Lösung

Endlich nochmal Wahrheitstabellen:

(a)

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

(b)

x_1	x_2	x_3	$x_2 \vee x_3$	$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge x_3$	$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden *Wahrheitstabellen*:

(a)

x_1	x_2	ϕ_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b)

x_1	x_2	x_3	ϕ_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Gib Formeln ϕ_1 und ϕ_2 an, welche die Situation in den Wahrheitstabellen widerspiegeln.

Lösung

Die einfachste Möglichkeit ist natürlich, das Ganze als eine DNF direkt an der Tabelle abzulesen:

(a) $(\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$. Die Formel entspricht dem XOR-Operator. Kürzer wäre also auch $x_1 \leftrightarrow \neg x_2$.

(b) $(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$. Etwas kürzer ist aber $(x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge x_3$.

Aufgabe 6

(a) Der *Sheffer stroke*¹, geschrieben als $\uparrow$, ist über folgende Wahrheitstabelle definiert:

$\hat{\nu}(\phi)$	$\hat{\nu}(\psi)$	$\hat{\nu}(\phi \uparrow \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Der Sheffer stroke wird also nur dann falsch, wenn beide Teilformeln wahr sind.

Beweise, dass sich Formeln der Art $\neg x_1$, $x_1 \wedge x_2$ und $x_1 \vee x_2$ *ausschließlich* durch den Sheffer stroke darstellen lassen.

Etwas genauer: Zeige, dass es Formeln $\rho_{\neg}$, $\rho_{\wedge}$, $\rho_{\vee}$ gibt, in denen als einziger Junktor der Sheffer stroke vorkommt, welche äquivalent zu obigen Formeln sind.

(b) Wandle die Formel $\phi := x_1 \rightarrow \neg x_2$ in eine äquivalente Formel nur mit Sheffer strokes um.

Lösung

Wie man leicht sieht ist der Sheffer stroke gerade die Negation der Konjunktion (der sogenannte NAND-Operator). Es gilt also $\phi \uparrow \psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$.

(a) Es gilt:

$$\text{i) } \neg x_1 \equiv \neg(x_1 \wedge x_1) \equiv x_1 \uparrow x_1.$$

$$\text{ii) } x_1 \wedge x_2 \equiv \neg\neg(x_1 \wedge x_2) \equiv \neg(x_1 \uparrow x_2) \equiv (x_1 \uparrow x_2) \uparrow (x_1 \uparrow x_2).$$

Wahrheitstabelle:

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \uparrow x_2$	$(x_1 \uparrow x_2) \uparrow (x_1 \uparrow x_2)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1

$$\text{iii) } x_1 \vee x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2) \equiv \neg((x_1 \uparrow x_1) \wedge (x_2 \uparrow x_2)) \equiv (x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_2 \uparrow x_2).$$

Wahrheitstabelle:

¹benannt nach Henry Maurice Sheffer, US-amerikanischer Logiker, 1882 - 1964

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \uparrow x_1$	$x_2 \uparrow x_2$	$(x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_2 \uparrow x_2)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1

Als Konsequenz kann man also festhalten, dass sich *jede* aussagenlogische Formel ausschließlich durch sheffer strokes darstellen lässt (alle anderen Junktoren lassen sich umwandeln in eine Kombination aus $\neg, \wedge, \vee$) indem man das Verfahren rekursiv auf Teilformeln anwendet. Diese Eigenschaft macht das NAND-Gatter zu einem der wichtigsten Bauteile für logische Schaltungen.

(b)

$$\begin{aligned}
 (x_1 \rightarrow \neg x_2) &\equiv (\neg x_1 \vee \neg x_2) \\
 &\equiv (\neg x_1 \uparrow \neg x_1) \uparrow (\neg x_2 \uparrow \neg x_2) \\
 &\equiv ((x_1 \uparrow x_1) \uparrow (x_1 \uparrow x_1)) \uparrow ((x_2 \uparrow x_2) \uparrow (x_2 \uparrow x_2))
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Eine Informatikerin und eine MSTlerin sitzen im Fachschaftsraum und unterhalten sich. Eine der beiden sagt „Ich bin Informatikerin“. Daraufhin sagt die andere „Ich bin MSTlerin“. Wir wissen, dass mindestens eine der beiden lügt. Welche der folgenden Situationen sind möglich?

- (a) Die Informatikerin lügt aber die MSTlerin sagt die Wahrheit.
- (b) Die Informatikerin sagt die Wahrheit und die MSTlerin lügt.
- (c) Beide lügen.

Lösung

- (a) Die Informatikerin sagt also, dass sie MSTlerin ist. Die MSTlerin sagt dies auch, also ein Widerspruch, dass beide etwas unterschiedliches sagen. Damit nicht möglich.
- (b) Symmetrisch zu (a).
- (c) Informatikerin sagt sie ist die MSTlerin und MSTlerin sagt sie ist Informatikerin. Also sagen beide etwas unterschiedliches. Die Situation ist also möglich.

Aufgabe 8

Wir betrachten die Zahlen 1, 2, 3, 4 und die folgenden Bedingungen über deren Anordnung:

- i) Wenn die 1 neben der 3 steht, dann ist die 3 nicht neben der 4.

5 Übungsaufgaben zum Kapitel Logik und Beweise

- ii) Die 2 neben der 4 oder die 3 ist neben der 1.
- iii) Wenn die 2 nicht neben der 3 ist, dann ist die 4 nicht neben der 1.
- iv) Die 2 hat nur einen Nachbar.
- (a) Gib eine Lösung für das obige Problem an, wenn es eine gibt. Ansonsten argumentiere, warum es keine gibt.
- (b) Für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i < j$ sei N_{ij} ein Atom welches aussagt, dass i neben j steht (also links oder rechts daneben). Gib eine aussagenlogische Formel an, welche die obigen Bedingungen beschreibt.

Lösung

- (a) 2 3 1 4
 - (b) Wir formalisieren die Aussagen einzeln und bilden am Ende die Konjunktion über alle Formeln.
 - i) $N_{13} \rightarrow \neg N_{34}$
 - ii) $N_{24} \vee N_{13}$
 - iii) $\neg N_{23} \rightarrow \neg N_{14}$
 - iv) Wir geben zwei unterschiedliche Lösungswege an. Die Formeln sind jedoch äquivalent, wie sich beispielsweise durch eine Wahrheitstabelle zeigen lässt
1. Die 2 kann nur die 1, oder die 3 oder die 4 als Nachbarn haben. Jeder dieser Fälle schließt die anderen beiden Zahlen als Nachbarn aus:

$$(\neg N_{12} \wedge \neg N_{23}) \vee (\neg N_{23} \wedge \neg N_{24}) \vee (\neg N_{12} \wedge \neg N_{24})$$

2. Wenn 2 neben der 1 steht, steht es nicht neben 3 und 4. Wenn 2 neben der 3 steht, steht es nicht neben 1 und 4. Wenn 2 neben der 4 steht, steht es nicht neben 1 und 3. Diese drei Aussagen werden durch eine Konjunktion verknüpft:

$$(N_{12} \rightarrow (\neg N_{23} \wedge \neg N_{24})) \wedge (N_{23} \rightarrow (\neg N_{12} \wedge \neg N_{24})) \wedge (N_{24} \rightarrow (\neg N_{12} \wedge \neg N_{23}))$$

Aufgabe 9

- (a) Negiere die folgenden Aussagen. Verwende dabei in der ersten Aussage nur den Existenz- und in der zweiten Aussage nur den All-Quantor:
 - i) Alle Studenten sind faul.
 - ii) Es gibt einen Studenten, der alle Übungsblätter bearbeitet.

- (b) Wir betrachten eine Aussage der Form $\forall x : P(x)$ (für alle x gilt irgendeine Aussage P). Zeige, dass sich eine Aussage dieser Form auch durch einen Existenz-Quantor darstellen lässt (unter Verwendung der aussagenlogischen Junktoren).

Tipp: Was darf nicht gelten, wenn eine Eigenschaft für alle Elemente gelten soll?

Lösung

Wenn man Teil (b) verstanden hat, ist Teil (a) eigentlich einfach lösbar. Teil (a) ist nur dafür gedacht, dass explizit an einem Beispiel zu veranschaulichen. Man kann also auch Teil (b) vor Teil (a) erklären.

- (a) i) Es gibt einen Studenten, der nicht faul ist.
ii) Alle Studenten bearbeiten nicht alle Übungsblätter.
- (b) Wenn $P(x)$ für alle x gelten soll, so darf es kein x geben, welches $P(x)$ verletzt, also $P(x)$ nicht erfüllt. Folglich erhält man die folgende Äquivalenz:

$$\forall x : P(x) \equiv \neg(\exists x : \neg P(x))$$

Das ganze geht ganz äquivalent übrigens auch mit dem Existenz-Quantor.

Aufgabe 10

★ In Definition 4.20 auf Seite 37 ist die Definition für die Konvergenz einer Folge in natürlicher Sprache angegeben. Formalisiere diese Aussage in der Logik der ersten Stufe. Gehe dabei von einer festen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer festen Zahl $a \in \mathbb{R}$ aus.

Lösung

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon))$$

Aufgabe 11

Die leere Menge $\emptyset$ hat die Eigenschaft, dass $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A gilt.

Beweise, dass die leere Menge die einzige Menge ist, für die dies zutrifft, also dass es keine Menge $\emptyset' \neq \emptyset$ gibt mit $\emptyset' \subseteq A$ für jede Menge A .

Führe dazu einen *Widerspruchsbeweis*.

Lösung

Angenommen, es gibt diese Menge $\emptyset'$ mit den oben genannten Eigenschaften. Dann gilt $\emptyset \subseteq \emptyset'$ (Eigenschaft von $\emptyset$). Auf der anderen Seite gilt jedoch auch $\emptyset' \subseteq \emptyset$ (Eigenschaft von $\emptyset'$). Damit gilt aber, dass $\emptyset = \emptyset'$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme $\emptyset \neq \emptyset'$.

□

Aufgabe 12

Beweise mit *vollständiger Induktion*:

(a) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(b) $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

(c) Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $2n < 2^n$? In diesem Fall startet die Induktion nicht mit 0, sondern erst mit der Zahl n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage gilt.

(d) Sei f_n die n -te Fibonacci-Zahl:

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

Lösung

(a) **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 \frac{i}{(i+1)!} = \frac{0}{1!} = 0 = 1 - \frac{1}{1!} \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{i=0}^n \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{(i+1)!} &= \frac{n+1}{(n+2)!} + \sum_{i=0}^n \frac{i}{(i+1)!} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n+1}{(n+2)!} + 1 - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 + \frac{n+1}{(n+2)!} - \frac{n+2}{(n+2)!} \\ &= 1 + \frac{n+1-n-2}{(n+2)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \square \end{aligned}$$

(b) **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= 2^{n+1} + \sum_{i=0}^n 2^i \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1 \quad \square\end{aligned}$$

(c) Wir stellen eine kleine Tabelle auf:

n	$2n$	2^n	erfüllt?
0	0	1	✓
1	2	2	×
2	4	4	×
3	6	8	✓
4	8	16	✓

Man vermutet also, dass die Ungleichung gilt für $n = 0$ und alle $n \geq 3$. Dies beweisen wir nun mit Induktion:

Induktionsanfang: $n = 3$.

Folgt aus Tabelle.

Induktionsvoraussetzung: $2n < 2^n$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}2(n+1) &= 2n + 2 \\ &\stackrel{\text{IV}}{<} 2^n + 2 \\ &\stackrel{(*)}{<} 2^n \cdot 2 \\ &= 2^{n+1}\end{aligned}$$

Für die Behauptung $(*)$ müssen wir uns noch überlegen, wieso diese gilt.

Es gilt

$$\begin{aligned}2^n + 2 &< 2 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow 2^n + 2 &< 2^n + 2^n \\ \Leftrightarrow 2 &< 2^n\end{aligned}$$

Die Umformung ist also für $n \geq 3$ sicherlich korrekt. $\square$

(d) **Induktionsanfang:** $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 f_i = f_0 = 0 = 1 - 1 = f_2 - 1$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} f_i &= f_{n+1} + \sum_{i=0}^n f_i \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} f_{n+1} + f_{n+2} - 1 \\ &= f_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Hierbei handelt es sich nicht um eine Aufgabe im eigentlichen Sinne sondern um ein kleines Gedankenspiel. Bereits in dem Kapitel über Mengenlehre haben wir geschrieben, dass die Mengenlehre, wie wir sie vorgestellt haben, nicht widerspruchsfrei ist. Einer der Widersprüche der naiven Mengenlehre ist als „Russellsche Antinomie“ bekannt. Eine Variante ist das sogenannte Barbier-Paradoxon welches von Bertrand Russell² formuliert wurde:

„In einem Dorf lebt ein Barbier. Dieser Barbier rasiert genau jene Männer des Dorfes, welche sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst?“

Mit ein wenig Nachdenken erhält man einen Widerspruch, die Definition der Menge ist jedoch erlaubt. Etwas formaler kann man die folgende Menge betrachten:

$T := \{X \mid X \notin X\}$ (die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten). Man kommt leicht zu dem Widerspruch $T \in T \Leftrightarrow T \notin T$.

Als Lösung verwendet man eine *axiomatische Mengenlehre*, wie zum Beispiel die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC)³.

²britischer Mathematiker und Philosoph, 1872-1970

³Wer mehr Informationen haben will kann sich z.B. <http://mathworld.wolfram.com/Zermelo-FraenkelAxioms.html> angucken